<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 5 (1993)

УДК 535.36

В.А. Бабенко, А.Ф. Синюк

МЕТОД РАСЧЕТА ВНУТРЕННЕГО ПОЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ СФЕРЫ С НЕОДНОРОДНОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Построен устойчивый и надежный алгоритм расчета внутреннего поля в двухслойной сферической частице с однородным ядром и радиально-неоднородной оболочкой, профиль неоднородности которой описывается степенной функцией. Эта модель предназначена для взаимодействия электромагнитной волны с фрактальными кластерами в рамках асимптотической модели кластера.

В последние годы большой интерес проявляется к оптике фрактальных кластеров, в частности к расчету оптических характеристик агломератов сажи, образующихся в атмосфере в процессе стохастической ассоциации первичных субчастиц – продуктов сгорания – в более крупные рыхлые образования микронных размеров (см., например, [1-4]). Принципиальным затруднением при описании оптических свойств фракталов является построение адекватной модели объекта. В [5] была предложена так называемая асимптотическая модель кластера в виде двухслойной сферы с однородным ядром и радиально-неоднородной оболочкой. Такая модель может более или менее правильно описать реальную зависимость показателя преломления оболочки от радиальной координаты, с другой стороны, дифракционная задача при соответствующем выборе профиля имеет точное решение в специальных функциях. Методика расчета характеристик рассеяния света такими объектами описана в [6], а результаты расчетов – в [7, 8].

Однако для более детального изучения взаимодействия электромагнитной волны с фрактальными кластерами необходимо иметь сведения и о распределении поля внутри кластера. В частности, рассчитанные в рамках указанной модели величины локального поля могут помочь в решении вопроса о предполагаемом резком уменьшении порога возникновения нелинейных явлений [9] и выявить области наиболее активного взаимодействия. Вызывает также интерес применение модели радиально-неоднородной сферы при расчете нагрева сажистых структур, образующихся при горении угольных частиц в газовой фазе [10, 11], и ореольных структур, окружающих испаряющиеся частицы. Кроме того, при описании рассеивательных свойств неоднородных и анизотропных частиц, а также частиц с нелинейными свойствами в рамках метола интегрального уравнения [12] в качестве затравочного потенциала взаимодействия можно взять потенциал радиально-неоднородной частицы, что, в свою очередь, требует знания внутреннего поля.

Широкому внедрению указанной модели препятствуют математические затруднения (как аналитического, так и вычислительного плана); именно поэтому практически отсутствуют работы по внутренним полям радиально-неоднородных частиц (за исключением [13]). Целью настоящей работы является построение устойчивого и надежного алгоритма расчета внутреннего поля указанной разновидности двухслойных частиц с профилем радиальной неоднородности достаточно общего вида.

Уточним постановку задачи. Монохроматическая ($e^{i\omega t}$) плоская электромагнитная волна (длина волны λ, амплитуда E_0, распространяется в положительном направлении оси z, электрический вектор колеблется вдоль оси x) падает на частицу, состоящую из сферического ядра относительного радиуса $\rho_1 = 2\pi r_1/\lambda$ (r_1 – радиус ядра) с постоянным комплексным показателем преломления m_1, и концентрической оболочки относительного радиуса $\rho_2 = 2\pi r_2/\lambda$ (r_2 – внешний радиус частицы), показатель преломления которой $m_2(\rho)$ зависит от относительного расстояния ρ от центра сферы. Как известно [14], решениями векторных волновых уравнений для однородной области являются векторные волновые функции $\mathbf{M}^{(j)}_{\substack{e \\ o}nl}(m\rho)$, $\mathbf{N}^{(j)}_{\substack{e \\ o}nl}(m\rho)$, ($l = 1, 2, ...$; $n = 0, 1, ..., l$); индексу $j = 1$ соответствуют функции, регулярные в начале координат, а индексу $j = 3$ – функции, удовлетворяющие условию излучения в волновой зоне; индексы e и o означают соответственно четную и нечетную функции). Разложения электрического и магнитного полей для однородных областей ядра (E_1 H_1) и внешнего пространства (E_3, H_3) при выбранной геометрии задачи имеют вид [14]

$$\mathbf{E}_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l \, [\alpha_{1l} \, \mathbf{M}_{o1l}^{(1)} (m_1 \, \rho) + i \, \beta_{1l} \, \mathbf{N}_{e1l}^{(1)} (m_1 \, \rho)] \, ,$$

$$\mathbf{H}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \, m_1 \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l \, [- \beta_{1l} \, \mathbf{M}_{e1l}^{(1)} (m_1 \, \rho) + i \, \alpha_{1l} \, \mathbf{N}_{o1l}^{(1)} (m_1 \, \rho)] \, ,$$

$$\mathbf{E}_3 = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l \, [\mathbf{M}_{o1l}^{(1)} (\rho) + \alpha_{4l} \, \mathbf{M}_{o1l}^{(3)} (\rho) + i \, \mathbf{N}_{e1l}^{(1)} (\rho) + i \, \beta_{4l} \, \mathbf{N}_{e1l}^{(3)} (\rho)] \, ,$$

$$\mathbf{H}_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l \, [- \mathbf{M}_{e\,1l}^{(1)} (\rho) - \beta_{4l} \, \mathbf{M}_{e\,1l}^{(3)} (\rho) + i \, \mathbf{N}_{o1l}^{(1)} (\rho) + i \, \alpha_{4l} \, \mathbf{N}_{o1l}^{(3)} (\rho)] \, , \qquad (1)$$

где $\varepsilon_l = (-i)^l (2l + 1) \, / l \, (l + 1)$; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, несущественный множитель $E_0 e^{i\omega t}$ здесь и далее опускаем; α_{1l}, β_{1l}, α_{4l}, β_{4l} – амплитудные коэффициенты.

Сложнее обстоит дело с неоднородной областью оболочки ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Как показано в [12], элементарными векторными решениями волнового уравнения

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_2 - k_0^2 \, m_2^2(\rho) \, \mathbf{E}_2 = 0 \qquad (2)$$

являются векторные функции

$${}^{(e)}\mathbf{M}_{\delta nl}^{(j)} = \frac{1}{\rho} \, V_l^{(j)} (\rho) \, \mathbf{m}_{\delta nl} \, ,$$

$${}^{(e)}\mathbf{N}_{\delta nl}^{(j)} = \frac{1}{m_2^2(\rho) \, \rho} \left[\frac{1}{\rho} \, W_l^{(j)} (\rho) \, \mathbf{l}_{\delta nl} + W_l^{(j)\prime} (\rho) \, \mathbf{n}_{\delta nl} \right], \qquad (3)$$

а волнового уравнения

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_2 - \frac{\nabla m_2(\rho)}{m_2^2(\rho)} \, [\nabla \times \mathbf{H}_2] - k_0^2 \, m_2^2(\rho) \, \mathbf{H}_2 = 0 \qquad (4)$$

– векторные функции

$${}^{(h)}\mathbf{M}_{\delta nl}^{(j)} = \frac{1}{\rho} \, W_l^{(j)} (\rho) \, \mathbf{m}_{\delta nl} \, , \quad {}^{(h)}\mathrm{N}_{\delta nl}^{(j)} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} \, V_l^{(j)} (\rho) \, \mathbf{l}_{\delta nl} + V_l^{(j)\prime} (\rho) \, \mathbf{n}_{\delta nl} \right]. \qquad (5)$$

Здесь использованы следующие обозначения: l, m, n – угловые векторные волновые функции [12]; штрихи означают дифференцирование по аргументу р; смысл индекса j тот же, что и раньше; радиальные функции W_l и V_l являются решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$W_l''(\rho) - \frac{d}{d\rho} \left[\ln m_2^2(\rho) \right] W_l'(\rho) + \left[m_2^2(\rho) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] W_l(\rho) = 0, \qquad (6)$$

$$V_l''(\rho) + \left[m_2^2(\rho) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] V_l(\rho) = 0 \, . \qquad (7)$$

Разложение поля внутри оболочки (E_2, H_2) должно включать как регулярные ($j = 1$), так и нерегулярные ($j = 3$) функции. В соответствии с этим

$$\mathbf{E}_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l \, [\alpha_{2l}^{(e)} \mathbf{M}_{o1l}^{(1)}(\rho) + \alpha_{3l}^{(e)} \mathbf{M}_{o1l}^{(3)}(\rho) + + i\,\beta_{2l}^{(e)} \mathbf{N}_{e1l}^{(1)}(\rho) + i\,\beta_{3l} \mathbf{N}_{e1l}^{(3)}(\rho)];$$

$$\mathbf{H}_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l \, [-\beta_{2l}^{(h)} \mathbf{M}_{e1l}^{(1)}(\rho) - \beta_{3l}^{(h)} \mathbf{M}_{e1l}^{(3)}(\rho) + + i\,\alpha_{2l}^{(h)} \mathbf{N}_{o1l}^{(1)}(\rho) + i\,\alpha_{3l}^{(h)} \mathbf{N}_{o1l}^{(3)}(\rho)], \quad (8)$$

где α_{2l}, α_{3l}, β_{2l}, β_{3l} – амплитудные коэффициенты внутреннего поля оболочки. Для определения амплитудных коэффициентов, входящих в выражения (1) и (8), следует использовать граничные условия непрерывности тангенциальных компонент полей на двух границах раздела. В результате получаются две системы линейных алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов. Решая эти системы относительно амплитудных коэффициентов оболочки (в дальнейшем ограничимся только ими), получим после достаточно громоздких преобразований следующие выражения:

$$\alpha_{2l} = i\tau_{4l} / \zeta_l(\rho_2)\, V_l^{(1)}(\rho_2)\, M_l, \qquad \beta_{2l} = -\,i\,(m_2^2(\rho_2)\, \bar{\tau}_{4l} / \zeta_l(\rho_2)\, W_l^{(1)}(\rho_2)\, \bar{M}_l, \quad (9)$$

$$\alpha_{3l} = -\frac{V_l^{(1)}(\rho_1)}{V_l^{(3)}(\rho_1)} \, \frac{i\tau_{3l}}{\zeta_l(\rho_2)\, V_l^{(1)}(\rho_2)\, M_l}, \quad \beta_{3l} = -\frac{W_l^{(1)}(\rho_1)}{W_l^{(3)}(\rho_1)} \, \frac{i\, m_2^2(\rho_2)\, \bar{\tau}_{3l}}{\zeta_l(\rho_2)\, W_l^{(1)}(\rho_2)\, \bar{M}_l} \qquad , \quad (10)$$

где

$$M_l = \tau_{1l}\tau_{4l} - E_l\, \tau_{2l}\tau_{3l}\,, \; \bar{M}_l = -\,\bar{\tau}_{1l}\,\bar{\tau}_{4l} - c_l\,\bar{\tau}_{2l}\,\bar{\tau}_{3l}\,, \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{1l} \\ \tau_{2l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_l^{(1)}(\rho_2) \\ F_l^{(3)}(\rho_2) \end{pmatrix} - G_l(\rho_2)\,, \qquad \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{1l} \\ \bar{\tau}_{2l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_l^{(1)}(\rho_2) \\ R_l^{(3)}(\rho_2) \end{pmatrix} - m_2^2(\rho_2)\, G_l(\rho_2)\,,$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{3l} \\ \tau_{4l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_l^{(1)}(\rho_1) \\ F_l^{(3)}(\rho_1) \end{pmatrix} - m_1 D_l(m_1\rho_2)\,, \; \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{3l} \\ \bar{\tau}_{4l} \end{pmatrix} = \frac{m_1}{m_2^2(\rho_1)} \begin{pmatrix} R_l^{(1)}(\rho_1) \\ R_l^{(3)}(\rho_1) \end{pmatrix} - D_l(m_1\rho_2)\,, \quad (12)$$

$D_l(z)$ и $G_l(z)$ – логарифмические производные функций Рикатти-Бесселя $\psi_l(z)$ и Рикатти-Ханкеля $\xi_l(z)$ соответственно;

$$R_l^{(1,3)}(\rho) = W_l^{(1,3)\prime}(\rho) \,/\, W_l^{(1,3)}(\rho), \quad c_l = W_l^{(1)}(\rho_1)\, W_l^{(3)}(\rho_2) \,/\, W_l^{(3)}(\rho_1)\, W_l^{(1)}(\rho_2)\,,$$

$$F_l^{(1,3)}(\rho) = V_l^{(1,3)\prime}(\rho) \,/\, V_l^{(1,3)}(\rho), \quad E_l = V_l^{(1)}(\rho_1)\, V_l^{(3)}(\rho_2) \,/\, V_l^{(3)}(\rho_1)\, V_l^{(1)}(\rho_2)\,. \quad (13)$$

При выводе выражений (9) – (13) использовались вронскианы [15]:

$$W_l^{(1)}(r)\, W_l^{(3)\prime}(\rho) - W_l^{(1)\prime}(\rho)\, W_l^{(3)}(r) = i m_2^2(\rho)\,, \quad V_l^{(1)}(\rho)\, V_l^{(3)\prime}(\rho) - V_l^{(1)\prime}(\rho)\, V_l^{(3)}(\rho) = i$$

Возвратимся теперь к разложениям (8) поля внутри неоднородной оболочки. Если ввести обозначения

$$d_{1l} = \beta_{1l}\, W_l^{(1)}(\rho) + \beta_{3l}\, W_l^{(3)}(\rho), \; d_{2l} = \alpha_{2l}\, V_l^{(1)}(\rho) + \alpha_{3l}\, V_l^{(3)}(\rho), \; d_{3l} = \beta_{2l}\, W_l^{(1)\prime}(\rho) + \beta_{3l}\, W_l^{(3)\prime}(\rho), \qquad .1 \; .$$

то компоненты поля E_2 в сферической системе координат (r, θ, φ) запишутся в виде

$$E_{2r} = -\frac{\cos\varphi \sin\theta}{m_2^2(\rho)\,\rho^2} \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^{l+1}\,(2\,l+1)\,Q_l(\theta)\,d_{1l},$$

$$\begin{pmatrix} E_{2\theta} \\ -E_{2\varphi} \end{pmatrix} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l \left[\begin{pmatrix} Q_l(\theta) \\ S_l(\theta) \end{pmatrix} d_{2l} + \frac{i}{m_2^2(\rho)} \begin{pmatrix} S_l(\theta) \\ Q_l(\theta) \end{pmatrix} d_{3l} \right], \tag{15}$$

где $Q_l(\theta)$ и $S_l(\theta)$ – угловые функции, выражающиеся через присоединенные полиномы Лежандра: $Q_l(\theta) = P_l^{(1)}(\cos\theta)/\sin\theta$, $S_l(\theta) = \mathrm{d}P_l^{(1)}(\cos\theta)/\mathrm{d}\theta$. Реально рассчитываемой величиной является безразмерное отношение $|\mathbf{E}|^2$ в определенной точке частицы к интенсивности падающей волны E_0^2. Поскольку множитель E_0 мы ранее опустили, можно полагать, что это отношение равно

$$B = E_{2r} E_{2r}^* + E_{2\varphi} E_{2\varphi}^* + E_{2\theta} E_{2\theta}^* \,. \tag{16}$$

На этом заканчивается построение формальной схемы решения задачи о внутреннем поле двухслойной частицы с однородным ядром и радиально-неоднородной оболочкой. Остался, однако, невыясненным вопрос о радиальных функциях W_l и V_l. Конкретный вид радиальных уравнений (6), (7) и, следовательно, их решений W_l и V_l зависит от выбора профиля показателя преломления в оболочке $m_2(\rho)$. Как показано в [12], аналитические решения радиальных уравнений возможны лишь для весьма ограниченного набора профилей $m_2(\rho)$, при этом, как правило, решения выражаются через гипергеометрические функции, неудобные для численного расчета. Единственным реальным профилем $m_2(\rho)$, позволяющим избежать появления гипергеометрических функций, является степенная зависимость

$$m_2(\rho) = A\rho^{\mathrm{b}}, \tag{17}$$

где A, A – произвольные комплексные постоянные. Достоинство профиля (17) также в том, что он позволяет удовлетворительно описать характерные особенности изменения оптических постоянных на периферии кластера [7, 8]. При подстановке профиля (17) в радиальные уравнения (6), (7) получаются дифференциальные уравнения, решениями которых являются цилиндрические функции

$$\begin{pmatrix} V_l^{(1)}(\rho) \\ V_l^{(3)}(\rho) \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} J_{\mu_l}(X) \\ H_{\mu_l}^{(3)}(X) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} W_l^{(1)}(\rho) \\ W_l^{(3)}(\rho) \end{pmatrix} = \rho^{\,b+1/2} \begin{pmatrix} J_{\nu_l}(X) \\ H_{\nu_l}^{(2)}(X) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где J – функция Бесселя; $H^{(2)}$ – функция Ханкеля второго рода (индекс (2) далее опускаем). Аргумент X и индексы этих функций равны

$$X(\rho) = \frac{\rho\, m_2(\rho)}{b+1}, \quad \mu_l = \frac{2\,l+1}{2(b+1)}, \quad \nu_l = \frac{[l(l+1) + (b+1/2)^2]^{1/2}}{b+1}. \tag{19}$$

Очевидно, что при однородности оболочки ($b = 0$) функции V_l и W_l с точностью до несущественного постоянного множителя переходят в функции Рикатти-Бесселя и Рикатти-Ханкеля. Если же оболочка неоднородна, то индексы μ_l и ν_l в общем случае комплексны. Подставляя решения (18) в выражения для коэффициентов (14), после несложных преобразований получаем

$$d_{1l} = -\bar{\lambda}_l\,[\bar{\tau}_{4l} - \bar{\tau}_{3l}\,K_{\nu_l}(X_1)\,/\,K_{\nu_l}(X)]\,, \quad d_{2l} = \lambda_l\,[\tau_{4l} - \tau_{3l}\,K_{\mu_l}(X_1)\,/\,K_{\mu_l}(X)]\,,$$

$$d_{3l} = \frac{2\,b+1}{2\mathrm{r}}\,d_{1l} - \bar{\lambda}_l\,m_2(\rho) \left[\bar{\tau}_{4\,l}\,D_{\nu_l}(X) - \bar{\tau}_{3l}\,\frac{K_{\nu_l}(X_1)}{K_{\nu_l}(X)}\,G_{\nu_l}(X) \right], \tag{20}$$

где

$$\lambda_l = \frac{i}{M_l\,\zeta_l(\rho_2)}\sqrt{\frac{\rho}{\rho_2}}\,\frac{I_{\mu_l}(X)}{I_{\mu_l}(X_2)}; \quad K_{\nu_l\mu_l}(z) = \frac{I_{\nu_l,\,\mu_l}(z)}{H_{\nu_l,\,\mu_l}(z)},$$

$$\bar{\lambda}_l = \frac{i\,m_2^2(\rho_2)}{\bar{M}_l\,\zeta_l(\rho_2)}\left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^{b+1/2}\frac{I_{\nu_l}(X)}{I_{\nu_l}(X_2)}, \quad X_{1,2} = \frac{m_2(\rho_{1,2})}{b+1}\,\rho_{1,2}, \tag{21}$$

M_l и $\bar{M}_l$ описываются выражениями (11), где $C_l = K_{\nu_l}(X_1)/K_{\nu_l}(X_2)$, $E_l = K_{\mu_l}(X_1)/K_{\mu_l}(X_2)$, а вспомогательные коэффициенты τ_l и $\bar{\tau}_l$ принимают вид

$$\begin{pmatrix}\tau_{1\,l}\\ \tau_{2\,l}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\rho_2} - G_l(\rho_2) + m_2(\rho_2)\begin{pmatrix}D_{\mu_l}(X_2)\\ G_{\mu_l}(X_2)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\tau_{3\,l}\\ \tau_{4\,l}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\rho_1} - m_1 D_l(m_1,\rho_1) + m_2(\rho_1)\begin{pmatrix}D_{\mu_l}(X_1)\\ G_{\mu_l}(X_1)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\tau}_{1\,l}\\ \bar{\tau}_{2\,l}\end{pmatrix} = \frac{2b+1}{2\rho_2} - m_2^2(\rho_2)G_l(\rho_2) + m_2(\rho_2)\begin{pmatrix}D_{\nu_l}(X_2)\\ G_{\nu_l}(X_2)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\tau}_{3l}\\ \bar{\tau}_{4l}\end{pmatrix} = \frac{m_1}{m_2^2(\rho_1)}\left[\frac{2b+1}{2\rho_1} + m_2(\rho_1)\begin{pmatrix}D_{\nu_l}(X_1)\\ G_{\nu_l}(X_1)\end{pmatrix}\right] - D_l(m_1,\rho_1);$$

D_{ν_l,μ_l}, G_{ν_l,μ_l} – логарифмические производные функций J_{ν_l,μ_l} и H_{ν_l,μ_l}, соответственно.

Таким образом, для расчета внутреннего поля оболочки необходимо получить четыре группы функций: 1) функции $\xi_l(\rho_2)$ и логарифмические производные $G_l(\rho_2)$ и $D_l(m_l\rho_2)$; 2) угловые функции Q_l и S_l; 3) функции I_{ν_l}, логарифмические производные D_{ν_l}, G_{ν_l} и отношения $K_{\nu l}$ для фиксированных аргументов X_1 и X_2 и текущего аргумента X; 4) аналогичные функции для набора индексов μ_l. Вычисление функций первой и второй групп затруднений не вызывает. Для оценки числа членов L, достаточного для сходимости рядов (15), можно воспользоваться соотношением $L = f L_w$, где L_w – оценка числа членов ряда Ми в соответствии с [16], а f – эмпирический коэффициент, больше единицы. Появление коэффициента f связано с тем, что ряды по амплитудным коэффициентам внутреннего поля сходятся несколько медленнее аналогичных рядов по коэффициентам внешнего поля, для которых была первоначально введена оценка L_w. Наш опыт расчетов внутреннего поля показывает, что $f \sim 1{,}2$. Набор логарифмических производных $D_l(m_1\rho_1)$ ($l = L, L-1, \ldots 1$) рассчитывается по рекурсии «вниз», причем стартовые члены рекурсий получаются путем разложения в цепную дробь [17]. Функции $\xi_l(\rho_2)$ и $G_l(\rho_2)$ рассчитывались по обычной рекурсии «вверх» [14], аналогичным образом вычислялись и угловые функции $Q_l(\theta)$ и $S_l(\theta)$.

Гораздо сложнее обстоит дело с функциями третьей и четвертой групп. Как видно из (19), построение рекурсии по l здесь невозможно, что вынуждает проводить независимый расчет для каждого $l = 1, 2, \ldots, L$. Для одновременного расчета функций Бесселя $I_\nu(z)$ с комплексным индексом ν, логарифмических производных D_ν, G_ν и отношения K_ν мы несколько модифицировали методику, предложенную в [18, 19]. Поскольку подробное описание содержится в [6], здесь мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями. В основе методики лежит теорема сложения Гегенбауэра; она позволяет одновременно получить $I_\nu(z)$ и $D_\nu(z)$, однако предложенный в [19] параллельный расчет функции Неймана $Y_\nu(z)$ оказался численно нестабильным. Поэтому мы применили другой подход. Как известно, разложение отношения $D_l(z)$ в цепную дробь весьма стабильно в численном отношении [17]; незначительная модификация позволяет применить это разложение к комплексным индексам и рассчитать $D_{-\nu}(z)$.

Далее с помощью комбинации известных выражений для вронскианов из $I_\nu(z)$, $D_\nu(z)$, $D_{-\nu}(z)$ получаем $G_\nu(z)$, $K_\nu(z)$.

Разработанный алгоритм был реализован на ЭВМ БЭСМ-6. Контрольные расчеты показали совпадение с результатами для вырожденных случаев. Результаты расчетов внутреннего поля фрактальных образований, полученные на основе разработанного алгоритма, будут представлены в последующих публикациях.

В заключение авторы выражают благодарность В.Н. Кузьмину за полезные советы при обсуждении работы и И.Л. Кацевой за помощь в составлении программы.

1. Голицын Г.С, Шукуров А.Х., Гинзбург А.С. и др. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24. N 3. С. 227–234.
2. Chylek P., Ramaswamy V., Chang R. et al. // Appl. Optics. 1981. V. 20. N 17. P. 2980–2985.
3. Смирнов В.М. // УФН. 1986. Т. 149. Вып. 2. С. 177–219.
4. Berry M.V., Percival I.C. // Optica Acta. 1986. V. 33. N. 5. P. 577–591.
5. Кузьмин В.Н., Мороз О.В., Пришивалко А.П. // ДАН СССР. 1988. Т. 302. N 2. С. 332–334.
6. Бабенко В.А., Лейко С.Т. .// Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. N 2. С. 191–196.
7. Кузьмин В.Н., Мороз О.В. // Журнал прикладной спектроскопии. 1992. Т. 56. N 3. С. 446–450.
8. Кузьмин В.Н. // Изв. РАН. Сер. ФАО. 1992. Т. 28. N 9. С. 57–61.
9. Бутенко А.В., Шалаев В.М., Штокман М.И. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. N 1. С. 107–124.
10. Maskowski O.V., Altenkirch R.A., Mengus M.P. // Combust. flame. 1989. V. 76. N3. P. 415–420.
11. Sitarski M. // Particul. Sci. Technol. 1987. V. 5. N 2. P. 193–205.
12. Пришивалко А.П., Бабенко В.А., Кузьмин В.Н. Рассеяние и поглощение света неоднородными и анизотропными сферическими частицами. Минск: Наука и техника, 1984. 264 с.
13. Бабенко В.А., Пришивалко А.П., Лейко С.Т. // Журнал прикладной спектроскопии. 1976. Т. 25. N 1. С. 123–128.
14. Борен К., Хафмен D. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
15. Zich R. // Alta frequenza. 1969. V. 38. Num. Speciale. P. 30–34.
16. Wiscombe W.J. // Appl. Optics. 1980. V. 15. N 9. P. 1505–1509.
17. Lentz W.J. // Appl. Optics. 1976. V. 15. N 3. P. 668–671.
18. Goldstein M., Thaler R.M. // Mathem. Tables and other aids to computation. 1959, V. 13. N 66. P. 102–108.
19. Lewis J.E., Sarcar T.K., O'Kelly R.D. // Electron. Lett. 1971. V. 7. N 20. P. 615–616.

Институт физики им. Б. И. Степанова
Академии наук Беларуси

Поступила в редакцию
4 ноября 1992 г.

V.A. Babenko, A.F. Sinyuk. **The Inner Field Computing Method for a Two-Layer Spherical Particle With an Inhomogeneous Shell.**

The stable and reliable algorithm is constructed for computing the linner field in the two-layer spherical particle with the homogeneous core and the radially-inhomogeneous shell which inhomogeneity profile is described by the power function. This model is intended for computing the interaction of the electromagnetic wave with fractal clusters in the framework of the asymptotic cluster model.