<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 7 (1993)

УДК 539.05

А.С. Бурундуков

ПРОБЛЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТРЕКА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

Рассматривается проблема восстановления геометрических параметров трека заряженной частицы в морской воде – ее заряда, массы, энергии по оптическому черенковскому излучению. Предлагаются алгоритмы первичной фильтрации сигнала модулями узлов решетки детекторов.

Выдвинутый в середине 70-х годов проект ДЮМАНД (глубоководное детектирование мюонов и нейтрино) с программами АТЕНА (эксперимент с атмосферными нейтрино высоких энергий) и ЮНИКОРН (подводное детектирование межзвездных космических нейтрино) [1] по-прежнему является единственным доступным способом заглянуть далеко за тераэлектронвольтный горизонт физики элементарных частиц, т.к. человечеству, по-видимому, придется смириться с монополией Вселенной на производство частиц с энергией $10^2 \div 10^8$ ТэВ. Краткий расцвет экспериментальной физики элементарных частиц близок к завершению и похоже, что она вынуждена будет в недалеком будущем превратиться из экспериментальной науки в наблюдательную, такую же, как астрономия. Поэтому после краткого периода забвения в результате потрясающих успехов экспериментальной физики частиц в начале 80-х неизбежен ренессанс проекта ДЮМАНД и возрождение интереса к проблемам детектирования частиц высоких энергий, электромагнитных каскадов и т.д.

Так как оптические методы регистрации обладают более высокой информативностью по сравнению с акустическими (несмотря на относительно низкую стоимость последних), можно с высокой степенью вероятности утверждать, что проект будет реализован в оптическом варианте. Поэтому возникает необходимость более подробного экспериментального и теоретического изучения распространения и поглощения электромагнитных волн оптического диапазона в морской воде, процесса черенковского излучения, детектирования и фильтрования оптического сигнала на фоне биолюминесценции и т.д. В данной статье кратко рассматривается проблема восстановления геометрических параметров трека заряженной частицы, ее заряда, массы, энергии по регистрируемому черенковскому излучению, алгоритмы первичной фильтрации сигнала модулями узлов решетки детекторов и возможность регистрации экзотических процессов в рамках программы ДЭГРЭ (детектирование (супер) гравитационных эффектов) [2].

1. Черенковское излучение как источник информации о параметрах трека заряженной частицы

Рассмотрим случай движения в воде одиночной заряженной частицы. Процесс черенковского излучения хорошо изучен теоретически как на классическом, так и на квантовом уровнях, что позволяет построить удобные аналитические алгоритмы восстановления геометрических параметров трека, физических характеристик и параметров среды. В самом общем виде задача восстановления параметров может быть конкретизирована с помощью следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & E^3 \times E^3 & & & & \\
 & & \downarrow c & & & & \\
D(R^k) & \xrightarrow{p} & J(R^4) & \xrightarrow{g} & Y(R^{MN}) & \xrightarrow{a} & U(R^{MN}) \\
 & & & & & & \downarrow G_1 \\
 & & & r & & & U^*(R^{3M}) \\
 & & & & & & \downarrow G_2 \\
 & & & & & & H(R^k)\times L(R^{3M-k})\,.
\end{array}$$

Здесь $D(R^k)$–параметрическое пространство модели; k–размерность пространства модели; $J(R^4)$–трековое пространство, или пространство физической реализации модели; $E^3\times E^3$ –6-мерное пространство прямых в евклидовом пространстве R^3; $Y(R^{MN})$ – пространство геометрической реализации модели; M – число узлов в установке; $2N$– число ФЭУ в одном модуле узла ($N \ge 6$); $U(R^{MN})$ – пространство амплитуд; $U^*(R^{3M})$ – редуцированное амплитудное пространство; $H(R^k)$ – k-мерное многообразие <чистого сигнала>; $L(R^{3M-k})$ – пространство отделимого шума; p – отображение пространства параметров в пространство физической реализации; c – каноническая проекция; g – отображение из пространства физической реализации модели в пространство геометрической реализации, сводящееся к выбору геометрии установки и геометрии расположения ФЭУ в узловых модулях; a – отображение аппаратурной реализации, связанное, в частности, с чувствительностью ФЭУ; G_1 – первичная (внутримодульная) геометрическая фильтрация сигнала; G_2 – вторичная (межмодульная) фильтрация; r – изоморфное отображение $H(R^k)$ в $D(R^k)$.

Минимальная размерность пространства параметров $\dim D_{\min}(R^k) = 4$, так как это соответствует числу геометрических характеристик трека, они могут быть отождествлены с тремя углами Эйлера и одним параметром длины, соответствующей расстоянию, пройденному светом от траектории частицы до начала координатной системы, которую мы можем связать с геометрическим центром установки. Максимальная размерность $\dim D_{\max}(R^k) = 9$, так как кроме геометрических мы можем определить некоторые физические параметры и контрольные характеристики среды. Таким образом, в самом общем случае регистрации заряженной частицы соответствует точка в девятимерном пространстве параметров (α, β, γ, L, q, m, ε, μ, n), где α, β, γ – углы Эйлера, L – длина трека, q – заряд, m – масса и ε – энергия частицы, μ и n– оптические коэффициенты поглощения и преломления соответственно. В принципе возможно построение $\sum_{i=0}^{5} c_5^i$ моделей, в которых используются кроме геометрических характеристик произвольные комбинации остальных пяти параметров. Для моделей с числом параметров $k \le 6$ необходимо срабатывание, как минимум, двух модулей-узлов, для $6 < k \le 9$ их число равно трем.

Пространство линейных траекторий в R^3 в параметрическом виде задается как

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\,t,$$

т.е. прямую в R^3 можно определить как точку в $E^3\times E^3$. Каноническую проекцию $c : E^3\times E^3 \to C^2\times S^2 = T^3\times R^1$, где S^2 – двумерная сфера единичного радиуса; C^2 – двумерный конус; T^3 – трехмерный тор, определим в виде

$$\begin{cases} \mathbf{a} \to \mathbf{a} = \mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\left[(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2}\,\right]\operatorname{ctg}\hat{c} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{L} = L\mathbf{l}, \\ \mathbf{b} \to \dfrac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{n}, \end{cases}$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{n}$ – канонические координаты траектории; $\mathbf{l}$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{L}$; $\hat{c}$ – черенковский угол ($\hat{c} \cong 41°$). При этом $(\mathbf{l}, \mathbf{n}) = -\cos\hat{c}$, т.е. $\mathbf{L}$ направлен из начала координат в точку траектории, откуда приходит черенковское излучение. Ядром канонической проекции является 2-мерное многообразие, инвариантное относительно группы сдвигов в направлении $\mathbf{n}$:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathrm{l}\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' = \sigma\mathbf{b}. \end{cases}$$

Отображение $p(D(R^k) \to J(R^4))$ можно конкретизировать, выбрав пару векторов $\mathbf{l}_0$ и $\mathbf{n}_0$, например в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{n}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\hat{c} \\ 0 \\ \cos\hat{c} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

и использовав представление группы $SO(3)$ как группы ортогональных преобразований R^3:

$$P: (\alpha, \beta, \gamma, L) \to J(R^4) ;$$

$$L = L(A_3(\alpha)\, A_2(\beta)\, A_3(\gamma)\, \mathbf{l}_0) ;$$

$$\mathbf{n} = A_3(\alpha)\, A_2(\beta)\, A_3(\gamma)\, \mathbf{n}_0 ,$$

где

$$A_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{M}_\nu$ – радиус-вектор M-го модуля установки. Отображение $g : J(R^4) \to Y(R^{\mu\nu})$ – есть произведение двух преобразований: трансляции $T_{\mu\nu}$ вектора $\mathbf{L}$ на вектор $\mathbf{M}_\nu$:

$$\mathbf{L}'_\nu = T_{\mu\nu} = \mathbf{L} - \mathbf{M}_\nu$$

и последующей канонической проекции

$$g(\mathbf{L}) = c\, T_{\mu\nu}\, (\mathbf{L}) = c\, (\mathbf{L} - \mathbf{M}_\nu) .$$

В результате этих операций получим для каждого $\mathbf{M}_\nu$ вектор $\mathbf{L}_\nu$, указывающий на точку траектории, откуда пришел сигнал в точку $\mathbf{M}_\nu$. Зададим коммутатор

$$[c, T_{\mu\nu}]\, \mathbf{L} = \mathbf{R} = \pm\, R\, \mathbf{n} ,$$

где $\mathbf{R}$ – вектор, соединяющий две точки траектории, причем свет из одной достигает начала координат, а из другой попадает в точку $\mathbf{M}_\nu$. Затем строим объект $G_{\sigma\nu}$ как скалярное произведение N_σ на L_ν

$$G_{\sigma\nu} = (N_\sigma L_\nu).$$

Здесь ($\sigma = 1, 2, \ldots N$, $\nu = 1, 2, \ldots M$), где N_σ – единичный вектор, задающий направление в R^3 и реализованный в физическом пространстве двумя ФЭУ, направленными в противоположные стороны. Значение проекции вектора на это направление равно разности сигналов на двух ФЭУ, а совокупность всех N_σ образует геометрию модуля-узла установки. Таким образом, можно сказать, что $Y(\mu)$ – межмодульная, а $Y(\nu)$ – внутримодульная геометрия установки.

И наконец, рассмотрим отображение a: $Y(R^{\mu\nu}) \to U(R^{\mu\nu})$, которое мы определим формулой

$$A_{\sigma\nu} = \frac{q^2 k}{||L_m||^2}\, G_{\sigma\nu} \exp\left(-\mu(\lambda)\, L_\nu\right) ,$$

где $A_{\sigma\nu}$ – средняя амплитуда в фотоэлектронах: q – безразмерный заряд частицы в величинах, кратных заряду электрона: k – постоянная ФЭУ (для ФЭУ-49Б она составляет, по данным Байкальской группы исследователей, $8{,}57 \pm 0{,}43$ метров на фотоэлектрон): $\mu(\lambda)$ – показатель поглощения света морской водой. G-фильтрация заключается в разделении амплитудного пространства U на подмногообразия фильтрованного сигнала и устранимого шума. Внутримодульная фильтрация – наиболее простая операция, т.к. подмногообразие фильтрованного сигнала в этом случае является линейным 3-мерным подпространством. Для решения задачи в этом случае достаточно всего одного преобразования. Подробнее мы рассмотрим эту процедуру в следующем разделе. Межмодульная фильтрация G_2 существенно зависит от глобальной геометрии установки, поэтому здесь мы не будем ее рассматривать. Мы ограничимся только примером восстановления геометрических параметров трека при одновременной регистрации черенковского излучения двумя узлами установки.

Пусть $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ – радиусы-векторы двух узлов установки, а A_1 и A_2– G_1 – фильтрованные сигналы. Из равенства

$$\mathbf{L} = c \circ (\mathbf{L}_1 + \mathbf{M}_1) = c \circ (\mathbf{L}_2 + \mathbf{M}_2)\,, \tag{1}$$

домножив его на $\mathbf{n}$, получим

$$\sqrt{(\mathbf{L}_1 + \mathbf{M}_1)^2 - (\mathbf{L}_1 + \mathbf{M}_1, \mathbf{n})^2} = \sqrt{(\mathbf{L}_2 + \mathbf{M}_2)^2 - (\mathbf{L}_2 + \mathbf{M}_2, \mathbf{n})^2}\,. \tag{2}$$

Умножив (1) на $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ и произведя сложение и вычитание полученных уравнений, используя также (2), найдем решение системы уравнений

$$(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = \left(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1, \frac{\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2}{1 - (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2)}\right);$$

$$(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2) = \left(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1, \frac{\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 - 2\cos\hat{c}\,\mathbf{n}}{1 + (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2) - 2\cos^2\hat{c}}\right), \tag{3}$$

где, чтобы разрешить полностью задачу, необходимо найти направление движения частицы, задаваемое вектором $\mathbf{n}$. Это можно сделать, если воспользоваться соотношением $(\mathbf{l}_1\,\mathbf{n}) = -\cos\hat{c}$.

Тогда

$$\mathbf{n} = -\frac{\cos\hat{c}}{1 + (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2)}(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) \pm \sqrt{\frac{1 + (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2) - 2\cos^2\hat{c}}{1 - (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2)^2}}\;\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2\,, \tag{4}$$

откуда найдем выражения для L_1 и L_2:

$$L_1 = \left(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1, \frac{\mathbf{l}_1 - (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2)\mathbf{l}_2}{1 - (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2)^2} \pm \frac{\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 \cos\hat{c}}{\sqrt{((\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2) - 2\cos\hat{c})(1 - (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2)^2)}}\right);$$

$$L_2 = -\left(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1, \frac{\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1(\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2)}{1 - (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2)^2} \mp \frac{(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \cos\hat{c}}{\sqrt{((\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2) - \cos 2\hat{c})(1 - (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2)^2)}}\right). \tag{5}$$

Так как расстояние L обратно пропорционально амплитуде сигнала, то знак в (4) и (5) берется в зависимости от соотношения амплитуд A_1 и A_2.

2. Тела Платона и фильтрация оптического сигнала

Рассмотрим G_1-фильтрацию в случае, когда ФЭУ модулей образуют правильные многогранники (расположены в пространстве квазисферично). Ограничимся телами Платона – тетраэдром, кубом, октаэдром, додекаэдром, икосаэдром и двумя телами смешанной октаэдро-кубической симметрии.

Произвольный вектор $\mathbf{x}$ в E^3 можно разложить по ортогональному декартову базису $\mathbf{e}_i$: $\mathbf{x} = x^i\,\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Введем в E^3 N единичных векторов $\mathbf{N}_\sigma$ ($\sigma > 3$) и возьмем скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{N}_\sigma) = A_\sigma$, где $A_\sigma \in U^{\mu\nu}$ (μ фиксировано). Таким образом, вектор $\mathbf{N}_\sigma$ мы можем разложить по исходному базису $\mathbf{N}_\sigma = N^i_\sigma\,\mathbf{e}_i$. В этом случае скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{N}_\sigma)$ перепишется в виде

$$(\mathbf{x}, \mathbf{N}_\sigma) = x^i N^j_\sigma(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j) = x^i N^i_\sigma \delta_{ij} = x^i N_{\sigma i} = A_\sigma\,, \tag{6}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Задача восстановления $\mathbf{x}$ по величинам A_σ может быть решена двумя способами.

1). В E^3 выделяем C_N^3 троек векторов в виде набора базисов. Для каждой независимой тройки $N_\tau(\tau - 1, 2, 3)$ находим соответствующую обратную матрицу N_j^τ, такую, что $N_{\tau i} N_j^\tau = \delta_{ij}$. Тогда компоненты вектора x^i в декартовом базисе находятся умножением (6) на N_j^τ:

$$x^i N_{\tau j} N_j^\tau = x^i \delta_{ij} = A_\tau N_j^\tau = x^j \ .$$

В результате декартовы координаты x^i могут быть выражены через амплитуды сигнала следующей формулой:

$$x^i = \frac{1}{C_N^3} \sum A_\tau N^{\tau \iota} ,$$

где кроме суммирования по всем немым индексам проведено суммирование по всем линейно независимым тройкам векторов. Громоздкость метода очевидна, т.к., следуя ему, необходимо вычислить C_N^3 обратных матриц. Для додекаэдра ($N = 5$) $C_5^3 = 10$, а для икосаэдра $C_{10}^3 = 120$.

2). Матрицу N_j^τ удобно рассматривать не как набор из N-единичных векторов в E^3, а как тройку векторов в N-мерном пространстве U^N. Возникает мысль дополнить эту тройку до полного ортогонального базиса из N векторов в U^N и, совершив операцию ортогонального вращения и нормирования, получить такую систему координат в U^N, в которой первые три координаты соответствуют компонентам x^i, а оставшиеся составляют подпространство отделимого шума. В этом случае задача сводится просто к ортогонализации Грама-Шмидта. В матричном представлении эта процедура выглядит следующим образом. Отображение $x^i \to A_\tau$ записывается в виде

$$\left\| \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ A_N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ N_{N1} & N_{N2} & N_{N3} \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} .$$

Нам необходимо найти матрицу ортогонального преобразования $M_{\tau\rho}$, такую, что

$$\left\| \begin{matrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ M_{N1} & M_{N2} & \dots & M_{NN} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ N_{N1} & N_{N2} & N_{N3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{matrix} \right\| .$$

Первые три строки матрицы $M_{\tau\rho}$ – это просто столбцы $N_{11}... N_{N1};... N_{12}, N_{N2}; N_{13}... N_{N3}$, деленные на квадрат их модуля, остальные векторы такой же длины находятся с помощью стандартной процедуры Грама-Шмидта. Рассмотрим примеры.

а) Т е т р а э д р . Числа граней тетраэдра $2N$=4 недостаточно для однозначного восстановления амплитуды и направления сигнала по всем R^3.

б) К у б . У куба число граней $2N = 6$. Выбрав направления векторов, которые совпадают с направлениями векторов декартова базиса e_i, получим

$$N = \left\| \begin{matrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{matrix} \right\| \text{, т.е. } \begin{matrix} x^1 = A_1 \\ x^2 = A_2 \, . \\ x^3 = A_3 \end{matrix}$$

в) О к т а э д р . Для октаэдра $2N = 8$, т.е. избыточность базиса составляет $4 - 3 = 1$. Выберем базис в виде

$$N = \left\| \begin{matrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix} \right\| .$$

Решение задачи восстановления компонент x^i по избыточным данным запишется в виде

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(A_1 - A_3)\, ; \; x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(A_2 - A_4)\, ;$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)\, ; \; d_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\, .$$

Здесь d_1 – компонента отделимого шума.

Повернув октаэдр на $\pi/4$ вокруг оси z, получим более симметричную матрицу

$$N = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

и более симметричное решение

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(A_1 - A_2 - A_3 + A_4)\, ; \; x_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(A_2 + A_2 - A_3 - A_4)\, ;$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)\, ; \; d_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\, .$$

г) Д о д е к а э д р . Число граней додекаэдра $2N = 12$, т.е. размерность пространства отделимого шума равна 3. Выберем базис в E^3 в следующем виде:

$$N = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ (\sqrt{5} - 1)/2\sqrt{5} & \sqrt{(\sqrt{5} + 1)/2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ -(\sqrt{5} + 1)/2\sqrt{5} & -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ -(\sqrt{5} + 1)/2\sqrt{5} & -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \\ (\sqrt{5} - 1)/2\sqrt{5} & -\sqrt{(\sqrt{5} + 1)/2\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \end{matrix} \right\| .$$

В этом случае решение запишется таким образом:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} A_2 + \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} (A_3 + A_6) - \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}} (A_4 + A_5) \ ;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}} \ (A_3 - A_6) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}} \ (A_4 - A_5) \ ;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2\sqrt{5}} (A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) \ ;$$

$$d_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}} \ (A_1 + A_2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}} \ (A_3 + A_6) \ ;$$

$$d_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}} \ (A_1 + A_2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}} \ (A_4 + A_5) \ ;$$

$$d_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}} \ (A_3 - A_6) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}} \ (A_4 - A_5) \ .$$

д) Октаэдро-кубическая (ОК) симметрия. Для октаэдро-кубической симметрии число граней многогранника равно 14, т.е. избыточность геометрии модуля равна 4. Возможны две модификации ОК-симметрии. Первую зададим матрицей

$$N = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\| \begin{array}{ccc} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right\| \ .$$

Решением задачи будет

$$x_1 = \frac{3}{7} A_1 + \frac{\sqrt{3}}{7} (A_4 - A_5 - A_6 + A_7) \ ; \ x_2 = \frac{3}{7} A_2 + \frac{\sqrt{3}}{7} (A_4 + A_5 - A_6 - A_7) \ ;$$

$$x_3 = \frac{3}{7} A_3 + \frac{\sqrt{3}}{7} (A_4 + A_5 + A_6 + A_7) \ ; \ d_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} (A_4 - A_5 + A_6 - A_7) \ ;$$

$$d_2 = \frac{2\sqrt{3}}{7} A_1 - \frac{3}{14} (A_4 - A_5 - A_6 + A_7) \ ; \ d_3 = \frac{2\sqrt{3}}{7} A_2 - \frac{3}{14} (A_4 + A_5 - A_6 - A_7) \ ;$$

$$d_4 = \frac{2\sqrt{3}}{7} A_3 - \frac{3}{14} (A_4 + A_5 + A_6 + A_7) \ .$$

Вторая модификация может быть задана следующим образом:

$$N = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \end{array} \right\| \ .$$

Тогда решение записывается в виде

$$x_1 = \frac{3}{7} A_1 + \frac{\sqrt{6}}{7} (A_4 - A_6) \ ; \ x_2 = \frac{3}{7} A_2 + \frac{\sqrt{6}}{7} (A_5 - A_6) \ ;$$

$$x_3 = \frac{3}{7} A_3 + \frac{\sqrt{3}}{7} (A_4 + A_5 + A_6 + A_7) \ ; \ d_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} (A_4 - A_5 + A_6 - A_7) \ ;$$

$$d_2 = \frac{2\sqrt{3}}{7} A_1 - \frac{3}{7\sqrt{2}} (A_4 - A_6) \ ; \ d_3 = \frac{2\sqrt{3}}{7} A_2 - \frac{3}{7\sqrt{2}} (A_5 - A_7) \ ;$$

$$d_4 = \frac{2\sqrt{3}}{7} A_3 - \frac{3}{14} (A_4 + A_5 + A_6 + A_7) \ .$$

Заметим, что конкретный вид компонент d_i не несет никакого физического смысла, т.к. значение имеет лишь $d = \sqrt{\sum\limits_{1}^{N=4} d_i^2}$.

е) Икосаэдр. И наконец, мы завершим наши примеры случаем икосаэдрической симметрии. Число граней икосаэдра равно 20, размерность пространства отделимого шума $2N = 7$. Удачный выбор базиса обеспечивает краткость алгоритмов восстановления. Выберем базис в виде

$$N = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \\ -1/3 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{5}/3 \\ -1/3 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5}/3 & 1/\sqrt{3} & 1/3 \\ \sqrt{5}/3 & -1/\sqrt{3} & 1/3 \\ (3-\sqrt{5})/6 & (\sqrt{5}+1)/2\sqrt{3} & 1/3 \\ -(3+\sqrt{5})/6 & (\sqrt{5}-1)/2\sqrt{3} & 1/3 \\ -(3+\sqrt{5})/6 & -(\sqrt{5}-1)/2\sqrt{3} & 1/3 \\ (3-\sqrt{5})/6 & -(\sqrt{5}+1)/2\sqrt{3} & 1/3 \end{array} \right\| .$$

Тогда решением нашей задачи будет

$$x_1 = \frac{1}{5} A_2 - \frac{1}{10} (A_3 + A_4) + \frac{1}{2\sqrt{5}} (A_5 + A_6) + \frac{3-\sqrt{5}}{20} (A_7 + A_{10}) - \frac{3+\sqrt{5}}{20} (A_8 + A_9) \ ;$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{10} (A_3 - A_4 + A_5 - A_6) + \frac{\sqrt{3}}{20} (\sqrt{5} + 1) \ (A_7 - A_{10}) + \frac{\sqrt{3}}{20} (\sqrt{5} - 1) \ (A_8 - A_9);$$

$$x_3 = \frac{1}{10} (3 A_1 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10}) + \frac{1}{2\sqrt{5}} (A_2 + A_3 + A_4) \ ;$$

$$d_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} (\sqrt{5} A_1 - A_2 - A_3 - A_4) \ ;$$

$$d_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{55}} (A_1 + 3\sqrt{5} A_2 - \sqrt{5} (A_3 + A_4 + A_5 + A_6)) \ ;$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{3}{40}} (A_3 - A_4 - A_5 + A_6) \ ;$$

$$d_4 = -\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} (A_7 - A_{10}) + \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}} (A_8 + A_9) \ ;$$

$$d_5 = \frac{3}{10\sqrt{2}} (A_3 - A_4 + A_5 - A_6) + \frac{\sqrt{5}+1}{10\sqrt{2}} (A_7 - A_{10}) - \frac{\sqrt{5}-1}{10\sqrt{2}} (A_8 - A_9) \ ;$$

$$d_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{385}}A_1 + \frac{1}{10}\sqrt{\frac{3}{11}}A_2 - \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{77}}(A_3 + A_4) + 2\sqrt{\frac{3}{385}}(A_5 + A_6) - \frac{1}{10}\sqrt{\frac{33}{7}}(A_7 - A_8 - A_9 + A_{10});$$

$$d_7 = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{7}}A_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{33}{35}}(A_3 + A_4) - \frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{35}}(A_5 + A_6) - \frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}}(7 + \sqrt{5})(A_7 + A_{10}) - \frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}}(7 - \sqrt{5})(A_8 + A_9).$$

3. Программа ДЕГРЭ

Здесь мы кратко остановимся на перспективах регистрации гравитонов и других экзотических частиц, таких как фотино, гравитино, глюино и т.д. Существующие в настоящее время теории квантовой гравитации не удовлетворяют нас по многим причинам, главные из которых– это неренормируемость и нарушение унитарности с ростом энергии. Такими же дефектами страдала теория Ферми слабых взаимодействий, тем не менее она давала хорошую аппроксимацию вплоть до энергий, сравнимых с массой W-бозона. Поэтому мы надеемся, что более фундаментальные теории, изменив наши представления о гравитационном взаимодействии на планковских масштабах, тем не менее не изменят характера поведения сечений рассеяния при энергиях $\varepsilon \ll 10^{19}$ ГэВ.

В первом порядке теории возмущения по гравитационной константе возможны следующие пять процессов.

1). Распад гравитона на два фотона (глюона) в диэлектрике (барионе) [3]. Вероятности двухфотонного W_γ и двухглюонного W_{gl} распадов соответственно равны

$$W_\gamma \simeq \kappa^2 (n_\gamma^2 - 1)^2 \varepsilon^3 \simeq 5{,}1\cdot 10^{-38}(n^2 - 1)^2 \varepsilon^3 \text{ [эВ]};$$

$$W_{gl} \simeq \kappa^2 \varepsilon^3 \simeq 6{,}3\cdot 10^{-13} \varepsilon^3 \text{ [ГэВ]}.$$

2). Гравитонный резонанс на барионах. Соответствующая вероятность

$$W \simeq (\kappa^2/32\pi)\, m^3 .$$

Здесь $m \cong \varepsilon$ – масса барионного резонанса.

3). Гравитонная ионизация [4]. Сечение σ данного процесса равно:

$$\sigma \simeq \frac{k^2 Z^2 e^{10}}{8\pi}\frac{m}{\varepsilon} \simeq 6{,}2\cdot 10^{-62} \varepsilon^{-1} \text{ [ГэВ]см}^2 .$$

4). Гравитон-фотонная инверсия на ядрах:

$$\sigma \simeq \frac{k^2 Z^2 e^2}{128\pi} \simeq 1{,}6\cdot 10^{-63} \text{ см}^2 .$$

5). Гравитонное рождение хиггсов, W, Z-бозонов, X, Y-лептокварков

$$\sigma \simeq \frac{k^2 G_F m^2 x}{8\sqrt{2}\pi} \simeq 4{,}2\cdot 10^{-66} \text{ см}^2 .$$

Максимальную вероятность регистрации имеют процессы пп. 1 и 2. Частота квантовых гравитационных процессов в установке объемом в 1 км^3 $R \simeq 6{,}1\cdot 10^{-31}\, \varepsilon^3$ [ГэВ] F [гравитон/км$^2\cdot$с].

Минимальная плотность гравитонного потока, необходимая для регистрации, равна $F \geq 5\cdot 10^{24}\, \varepsilon^{-2}$ [ГэВ].

Теория супергравитации предсказывает существование новых частиц–супераналогов обычным: фотино, глюино, гравитино и т.д. Согласно оценкам поперечного сечения рассеяния [5], имеем $\sigma \simeq 10^{-38}\, \varepsilon$ [ГэВ] см^2.

Таким образом, в установке частота событий R примерно равна $6\cdot 10^{10}\, \varepsilon$ [ГэВ] F [частиц/км$^2\cdot$с], а минимальная плотность потока F больше или равна $5\cdot 10\, \varepsilon^{-1}$ [ГэВ].

1. P r o c e e d i n g s of 1975 Summer Workshop on DUMAND / Ed. P. Kotzer. Wash.: West. Wash. State College, 1976. 176 p.
2. B u r u n d u k o f f A . S . , K o p v i l l e m U . H . The perspectives of high energy cosmic gravitations registration: the programm DEGRE // 10 Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation, Padova 4–9 july 1983. P. 901.
3. Б у р у н д у к о в А . С . // VI Советская гравитационная конференция (Тезисы докл.) М.: Из-во УДН, 1984, с. 172.
4. B u r u n d u k o f f A . S . // GRG. 1985. V. 17. N 4. P. 311–318.
5. F a y e t P . // Phys. Lett. B. 1979. V. 86. P. 272–275.

Тихоокеанский океанологический институт
Дальневосточного отделения РАН

Поступила в редакцию
19 марта 1993 г.

A . S . B u r u n d u k o v . **The Problem on Reconstructing Parameters of a Charged Particle Tracks.**

The problem on reconstructing geometrical parameters of tracks of charged particles in sea water, as well as its charge, mass, and energy using Cherenkov optical radiation is considered. Algorithms of primary filtration of a signal by blocks of the dectors array nodes are proposed.