

## РАССЕЯНИЕ И ПЕРЕНОС ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 531.521

**Е.И. Касьянов, Г.А. Титов**

### **ПОЛЕ ЯРКОСТИ ОТРАЖЕННОЙ СОЛНЕЧНОЙ РАДИАЦИИ В УСЛОВИЯХ РАЗОРВАННОЙ ОБЛАЧНОСТИ. Ч. I. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА**

Разработанные для пуассоновской модели разорванной облачности алгоритмы метода Монте-Карло для расчета математического ожидания и дисперсии интенсивности отраженной солнечной радиации в заданном направлении наблюдения обобщаются на случай трехслойной облачно-аэрозольной атмосферы, расположенной над подстилающей поверхностью, отражающей по закону Ламберта.

#### **1. Введение**

Радиационный режим и поле яркости системы <атмосфера–подстилающая поверхность (ПП)> в значительной степени определяется многообразием форм и сильной пространственно-временной изменчивостью облачного покрова. Пространственная и угловая структура полей излучения облачной атмосферы и их чувствительность к изменениям характеристик облачности является важным источником информации, необходимой при формулировке и решении задач дистанционного оптического зондирования облачной атмосферы [1, 2] и ПП, спутниковой метеорологии, а также и восстановления альбедо системы <атмосфера–ПП> по данным спутниковых измерений [3, 4]. В настоящее время большинство теоретических исследований по этим проблемам основываются на решении уравнения переноса излучения в плоскопараллельном горизонтально однородном облачном слое, частично или полностью покрывающем небосвод. Однако в такой наиболее простой модели облачного поля не учитываются важные эффекты, связанные со случайной геометрией реальной облачности (нерегулярная причудливая форма очертаний, количество, размеры и положение в пространстве отдельных облаков) и играющие существенную роль в формировании радиационного бюджета и полей яркости облачной атмосферы.

Наличие рассмотренных выше недостатков, а также целого ряда нерешенных вопросов, связанных, например, с интерпретацией спутниковых данных [5], стимулировали развитие теории переноса излучения в стохастических рассеивающих средах (см., например, [6–9]). В работе [10] с помощью численного метода исследована угловая зависимость отраженного солнечного излучения и сделаны первые попытки оценить влияние эффектов, связанных со случайной геометрией облачного поля, на формирование средних угловых распределений интенсивности отраженной и пропущенной солнечной радиации. Используемый в этой работе численный метод позволяет получить лишь гистограммы средней интенсивности, однако не дает возможности рассчитать среднюю интенсивность в заданном направлении. Для выяснения более тонких особенностей в угловой структуре рассеянного света можно использовать уравнения для моментов интенсивности и соответствующие алгоритмы метода Монте-Карло [11–14]. Численные результаты, представленные в этих статьях, получены без учета влияния аэрозоля и ПП на перенос солнечной радиации.

В настоящей статье алгоритмы расчета стохастических характеристик интенсивности солнечной радиации в заданном направлении обобщаются на случай трехслойной облачно-аэрозольной атмосферы, расположенной над отражающей ПП.

#### **2. Модель атмосферы**

Предположим, что атмосфера состоит из трех слоев: облачного ( $\Lambda$ ), надоблачного ( $\Lambda_2$ ) и подоблачного ( $\Lambda_1$ ) аэрозольных слоев, расположенных над отражающей по закону Ламберта ПП. Горизонтально-однородные аэрозольные слои характеризуются оптической толщиной  $\tau_{a,2}$  и  $\tau_{a,1}$ , вероятностью выживания кванта  $\lambda_{a,2}$  и  $\lambda_{a,1}$  и не зависящей от высоты индикатрисой рассеяния  $g_a(\omega, \omega')$ , где  $\omega = (a, b, c)$  – единичный вектор направления. Оптическая модель разо-

рванной облачности задается в слое  $\Lambda$  в виде случайных скалярных полей коэффициента ослабления  $\sigma\kappa(\mathbf{r})$ , вероятности выживания кванта  $\lambda\kappa(\mathbf{r})$  и индикатрисы рассеяния  $g(\omega, \omega')\kappa(\mathbf{r})$ , где  $\kappa(\mathbf{r})$  – индикаторная функция случайного множества  $G \subset \Lambda$ , в котором присутствует облачное вещество. Математическая модель разорванной облачности строится на пуассоновских потоках точек на прямых [11]. Входными параметрами модели являются балл облачности  $p$ , толщина  $\Delta H = H - h$  и горизонтальный размер  $D$  облаков, определяющий корреляционную функцию облачного поля.

### 3. Алгоритм метода Монте-Карло для расчета средней интенсивности

На структуру полей яркости излучения в разорванной облачности оказывают влияние процессы рассеяния и поглощения, происходящие во внеоблачной атмосфере и на подстилающей поверхности. Это влияние должно быть учтено в алгоритмах расчета статистических характеристик интенсивности диффузной солнечной радиации. Для определенности будем считать, что требуется определить среднюю интенсивность отраженного солнечного излучения  $\langle I(H_a, \omega) \rangle$  в плоскости  $z = H_a$  и в направлении  $\omega$ , где  $H_a$  – верхняя граница атмосферы. Среднюю интенсивность отраженной солнечной радиации можно записать в виде суммы двух слагаемых

$$\langle I(H_a, \omega) \rangle = T_{a,2}(\omega) \langle I(H, \omega) \rangle + i_{a,2}(H_a, \omega). \quad (1)$$

Здесь  $i_{a,2}(H_a, \omega)$  является интенсивностью солнечной радиации, рассеянной надоблачной аэрозольной атмосферой;  $T_{a,2}(\omega) = \exp\left\{-\sigma_{a,2} \frac{H_a - H}{c}\right\}$  – пропускание слоя  $\Lambda_2$  в направлении  $\omega$ ;  $\langle I(H, \omega) \rangle = \langle i(H, \omega) \rangle + \langle j_d(H, \omega) \rangle$  – средняя интенсивность восходящего ( $c > 0$ ) солнечного излучения на верхней границе облачного слоя;  $\langle i(H, \omega) \rangle$  имеет смысл средней интенсивности, сформированной за счет рассеяния в облаках, а  $\langle j_d(H, \omega) \rangle$  можно интерпретировать как среднюю интенсивность излучения, рассеянного в подоблачной атмосфере и (или) отраженного от подстилающей поверхности и затем прошедшего через облачный слой без рассеяния. Поскольку вычисление  $i_{a,2}(H_a, \omega)$  является тривиальным (при известном количестве лучистой энергии, поступающей в  $\Lambda_2$  с верхней границы облачного слоя) и осуществляется по стандартным алгоритмам (см., например, [15]), то перейдем к рассмотрению переноса излучения в слое разорванной облачности. Из свойства линейности уравнения переноса излучения следует, что наличие над- и подоблачной атмосферы, а также подстилающей поверхности приводит только к изменению граничных условий, при которых должна решаться система уравнений для средней интенсивности в пределах облачного слоя  $\Lambda$ . По этой причине можно сразу записать решение для средней интенсивности  $\langle I(H, \omega) \rangle = \langle i(H, \omega) \rangle + \langle j_d(H, \omega) \rangle$  и функции  $U(H, \omega) = \langle \kappa(\mathbf{r}_H) I(\mathbf{r}_H, \omega) \rangle / p = u(H, \omega) + v_d(H, \omega)$ , которая используется в дальнейшем при рассмотрении корреляционной функции. Угловые скобки означают среднее по ансамблю реализаций облачного поля,  $\mathbf{r}_H \in z = H$ . Отметим, что получение системы уравнений для средней и корреляционной функции интенсивности, а также алгоритмы метода Монте-Карло для решения этих уравнений достаточно подробно изложены в [11–14].

Согласно [11, 12] имеем

$$\langle I(H, \omega) \rangle = \frac{\lambda}{2\pi c} \int \sum_{E_z}^2 D_i \exp\left(-\lambda_i \frac{H - \xi}{c}\right) d\xi \int_{4\pi} g(\mu) f(\xi, \omega') d\omega' + \langle j_d(H, \omega) \rangle; \quad (2)$$

$$U(H, \omega) = \frac{1}{2\pi\sigma p c} \int \sum_{E_z}^2 D_i \lambda_i \exp\left(-\lambda_i \frac{H - \xi}{c}\right) d\xi \int_{4\pi} g(\mu) f(\xi, \omega') d\omega' + v_d(H, \omega); \quad (3)$$

$$\langle j_d(H, \omega) \rangle = S_d(h, \omega) \sum_{i=1}^2 C_i \exp\left(-\lambda_i \frac{H - h}{c}\right); \quad (4)$$

$$v_d(H, \omega) = S_d(h, \omega) \sum_{i=1}^2 D_i \exp\left(-\lambda_i \frac{H-h}{c}\right), \quad (5)$$

где  $S_d(h, \omega)$  – интенсивность диффузной радиации, поступающей на нижнюю границу облачного слоя (диффузного источника). Отметим, что величина  $S_d(h, \omega)$  заранее неизвестна, однако при решении задачи переноса излучения методом Монте-Карло эта величина легко определяется;

$$E_z = (h, H), \lambda_{1,2} = \frac{\sigma + A(\omega)}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma + A(\omega))^2 - 4 A(\omega) p \sigma}}{2},$$

$$C_1 = \frac{\lambda_2 - \sigma p}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = 1 - C_1, \quad D_1 = \frac{\lambda_2 - \sigma}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad D_2 = 1 - D_1,$$

$$A(\omega) = A \times (|a| + |b|), \quad A = (1,65 (p - 0,5)^2 + 1,04)/D,$$

для сферических частиц  $g(\omega, \omega') = g(\mu)/2\pi$ ,  $\mu = \omega'(\mathbf{r}_H - \mathbf{r}') / (\mathbf{r}_H - \mathbf{r}')$ .

Функция  $f(\mathbf{x}) = \sigma \langle \kappa(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}, \omega) \rangle$  имеет смысл средней плотности столкновений и является решением интегрального уравнения

$$f(\mathbf{x}) = \int_X k(\mathbf{x}', \mathbf{x}) f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \tilde{y}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

с ядром

$$k(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{\lambda g(\mu) \sum_{i=1}^2 D_i \lambda_i \exp\{-\lambda_i |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\}}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \delta\left(\omega - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \quad (7)$$

и свободным членом

$$\tilde{y}(\mathbf{x}) = S_d(\mathbf{x}_z) \psi(\mathbf{x}) = S_d(\mathbf{x}_z) \sum_{i=1}^2 C_i \lambda_i \exp\{-\lambda_i |\mathbf{r} - \mathbf{r}_z|\}, \quad (8)$$

где  $X$  является фазовым пространством координат и направлений;  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \omega)$ ,  $S_d(\mathbf{x}_z)$  – интенсивность диффузной радиации, поступающей на нижнюю и верхнюю границы облачного слоя,  $\mathbf{x}_z = (\mathbf{r}_z, \omega)$ ,  $\mathbf{r}_z \in z = h$  при  $c > 0$ ;  $\mathbf{r}_z \in z = H$  при  $c < 0$ .

Рассмотрим задачу вычисления методом Монте-Карло линейных функционалов

$$J_h = (f, h) = \int_X f(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (9)$$

в частности  $\langle i(H, \omega) \rangle$  является таким функционалом. В пространстве  $L_1$  для ядра (7) мы имеем  $\|K\| \leq \lambda \leq 1$ , а для ограниченной среды  $\|K^2\| < 1$ , что обеспечивает сходимость ряда Неймана уравнения (6) и, следовательно, возможность применения метода Монте-Карло для оценки линейных функционалов (9).

Рассмотрим алгоритм метода Монте-Карло для оценки функционала  $J_h$ . Определим цепь Маркова начальной  $\psi(\mathbf{x})$  и переходной  $k(\mathbf{x}', \mathbf{x})/\lambda$  плотностью ( $k(\mathbf{x}', \mathbf{x})$  является субстохастическим ядром). Для оценки  $J_h$  имеем

$$J_h = (f, h) = \int_X f(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = M \sum_{n=0}^{N_1} Q_n h(\mathbf{x}), \quad (10)$$

где  $M$  – знак математического ожидания по ансамблю реализаций траекторий марковских цепей;  $N_1$  – случайный номер последнего состояния, вспомогательный вес  $Q_n$  рассчитывается по

формулам  $Q_0 = S_d(\mathbf{x}_z)$ ,  $Q_n = \lambda Q_{n-1}$ . Согласно уравнениям (2) и (3) среднюю интенсивность  $\langle I(H, \omega) \rangle$  и функцию  $u(H, \omega)$  можно вычислить, если в (10) положить

$$h_i(\mathbf{x}_n) = \begin{cases} \frac{g(\mu_n)^2}{2\pi c} \sum_{i=1}^2 D_i \exp \left\{ -\lambda_i \frac{H-z_n}{c} \right\}, & c(H-z_n) > 0, \\ 0, & c(H-z_n) < 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$h_u(\mathbf{x}_n) = \begin{cases} \frac{g(\mu_n)}{2\pi \sigma p c} \sum_{i=1}^2 D_i \lambda_i \exp \left\{ -\lambda_i \frac{H-z_n}{c} \right\}, & c(H-z_n) > 0, \\ 0, & c(H-z_n) < 0, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\mu_n = (\omega_n, \omega)$ .

Вычисление функций  $\langle I(H_a, \omega) \rangle$  и  $U(H_a, \omega)$  на верхней границе атмосферы осуществляется следующим образом. В слоях  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , а также при отражении от подстилающей поверхности используются стандартные алгоритмы моделирования траекторий фотонов [15]. В облачном слое моделирование траекторий осуществляется по описанному выше алгоритмам. Выражения (11) и (12) для вычисления функций  $\langle I(H_a, \omega) \rangle$  (см., формулу (1)) и  $U(H_a, \omega)$  имеют следующий вид.

1. Столкновение в надоблачной атмосфере (рис. 1, слой  $\Lambda_2$ , точка  $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{r}_1, \omega_1)$ ):

$$h_i(\mathbf{x}_n) = \frac{g_a(\mu_n)}{2\pi c} \exp \left\{ -\sigma_{a,2} \frac{H_a - z_n}{c} \right\}. \quad (13)$$

Для оценки функции  $U(H_a, \omega)$  нужно положить  $h_u(\mathbf{x}_n) = h_i(\mathbf{x}_n)$ .

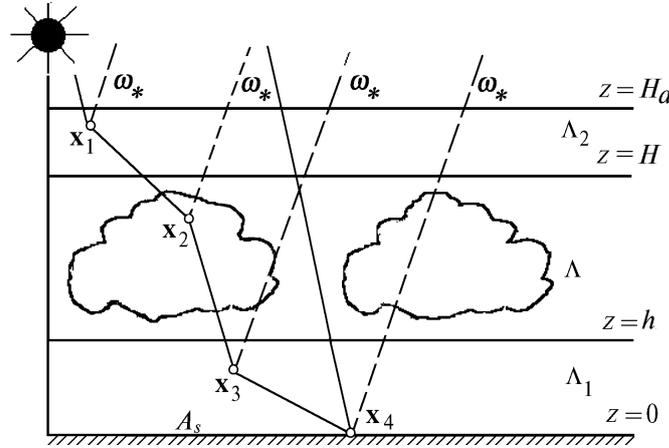


Рис. 1. Схематическая иллюстрация трехслойной облачной атмосферы и траекторий фотонов: выделенные точки показывают вклады в  $\langle I(H_a, \omega) \rangle$  под- и надоблачной атмосферы, облаков и подстилающей поверхности

2. Столкновение в облаках (рис. 1, слой  $\Lambda$ , точка  $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{r}_2, \omega_2)$ ):

$$h_i(\mathbf{x}_n) = \frac{g(\mu_n)^2}{2\pi c} \sum_{i=1}^2 D_i \exp \left\{ -\lambda_i \frac{H-z_n}{c} \right\} \exp \left\{ -\sigma_{a,2} \frac{H_a - H}{c} \right\}; \quad (14)$$

$$h_u(\mathbf{x}_n) = \frac{g(\mu_n)}{2\pi \sigma p c} \sum_{i=1}^2 D_i \lambda_i \exp \left\{ -\lambda_i \frac{H-z_n}{c} \right\} \exp \left\{ -\sigma_{a,2} \frac{H_a - H}{c} \right\}.$$

3. Столкновение в подоблачной атмосфере (рис. 1, слой  $\Lambda_1$ , точка  $\mathbf{x}_3 = (\mathbf{r}_3, \omega_3)$ ):

$$h_i(\mathbf{x}_n) = \frac{g_a(\mu_n)}{2\pi c} \sum_{i=1}^2 C_i \exp\left\{-\lambda_i \frac{H-h}{c}\right\} \exp\left\{-\sigma_{a,1} \frac{h-z_n}{c} - s_{a,2} \frac{H_a-H}{c}\right\}; \quad (15)$$

$$h_u(\mathbf{x}_n) = \frac{g_a(\mu_n)}{2\pi c} \sum_{i=1}^2 D_i \exp\left\{-\lambda_i \frac{H-h}{c}\right\} \exp\left\{-\sigma_{a,1} \frac{h-z_n}{c} - s_{a,2} \frac{H_a-H}{c}\right\}.$$

4. При отражении от подстилающей поверхности (рис. 1, точка  $\mathbf{x}_4 = (\mathbf{r}_4, \omega_4)$ ) вспомогательный вес частицы умножается на  $A_s/2\pi$  и оценки имеют вид

$$h_i(\mathbf{x}_n) = 2 \sum_{i=1}^2 C_i \exp\left\{-\lambda_i \frac{H-h}{c}\right\} \exp\left\{-\sigma_{a,1} \frac{h}{c} - \sigma_{a,2} \frac{H_a-H}{c}\right\}; \quad (16)$$

$$h_u(\mathbf{x}_n) = 2 \sum_{i=1}^2 D_i \exp\left\{-\lambda_i \frac{H-h}{c}\right\} \exp\left\{-\sigma_{a,1} \frac{h}{c} - \sigma_{a,2} \frac{H_a-H}{c}\right\}.$$

#### 4. Алгоритм метода Монте-Карло для расчета корреляционной функции

Пусть в точке  $\mathbf{R} = (\hat{x}, \hat{y}, H)$  находится приемник излучения с телесным углом поля зрения  $\Delta\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$  (рис. 2). Приемник измеряет величину

$$F_{\text{mes}}(\mathbf{R}) = \int_{\Delta\Omega} I(\mathbf{R}, \omega) d\omega, \quad (17)$$

и требуется определить корреляционную функцию

$$K_F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \langle F_{\text{mes}}(\mathbf{R}_1) F_{\text{mes}}(\mathbf{R}_2) \rangle = \int_{\Delta\Omega} d\omega_1 \int_{\Delta\Omega} \langle I(\mathbf{R}_1, \omega_1) I(\mathbf{R}_2, \omega_2) \rangle d\omega_2. \quad (18)$$

При  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$  из (18) получаем дисперсию

$$D_F(\mathbf{R}) = \langle F_{\text{mes}}^2(\mathbf{R}) \rangle = \int_{\Delta\Omega} d\omega_1 \int_{\Delta\Omega} \langle I(\mathbf{R}, \omega_1) I(\mathbf{R}, \omega_2) \rangle d\omega_2. \quad (19)$$

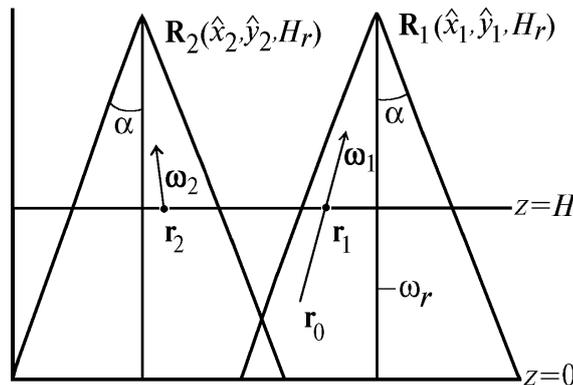


Рис. 2. Схема, иллюстрирующая геометрию задачи

Рассмотрим задачу вычисления дисперсии и корреляционной функции солнечной радиации в трехслойной модели атмосферы, ограниченной снизу подстилающей поверхностью. Анализ решения задачи начнем с обсуждения влияния надоблачной атмосферы (слой  $\Lambda_2$ ). Оптическая толщина этого слоя  $\Lambda_2$  мала (для фоновой модели  $\tau_{a,2} < 1$ ), и можно пренебречь рассеянием излучения, уходящего с верхней границы облачного слоя. Тогда случайную интенсивность солнечной радиации можно записать в виде

$$I(\mathbf{R}_1, \boldsymbol{\omega}) = T_{a,2}(\boldsymbol{\omega}) I(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}) + \tilde{i}_{a,2}(\mathbf{R}_1, \boldsymbol{\omega}). \quad (20)$$

Здесь  $\tilde{i}_{a,2}(\mathbf{R}_1, \boldsymbol{\omega})$  имеет смысл интенсивности диффузной солнечной радиации, рассеянной надоблачной атмосферой, при условии, что излучение поступает только на верхнюю границу слоя  $\Lambda_2$ . В рассматриваемом приближении пропускание  $T_{a,2}$  и интенсивность  $\tilde{i}_{a,2}(\mathbf{R}_1, \boldsymbol{\omega})$  являются неслучайными функциями. Учитывая последнее, после подстановки (20) в (18) получаем

$$\begin{aligned} K_F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) &= \int_{\Delta\Omega} \int_{\Delta\Omega} \langle [T_{a,2}(\boldsymbol{\omega}_1) I(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) + \tilde{i}_{a,2}(\mathbf{R}_1, \boldsymbol{\omega}_1)] [T_{a,2}(\boldsymbol{\omega}_2) I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) + \tilde{i}_{a,2}(\mathbf{R}_2, \boldsymbol{\omega}_2)] \rangle d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 = \\ &= \int_{\Delta\Omega} \int_{\Delta\Omega} \{ T_{a,2}(\boldsymbol{\omega}_1) T_{a,2}(\boldsymbol{\omega}_2) \langle I(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle + T_{a,2}(\boldsymbol{\omega}_1) \langle I(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) \rangle \tilde{i}_{a,2}(\mathbf{R}_2, \boldsymbol{\omega}_2) + \tilde{i}_{a,2}(\mathbf{R}_1, \boldsymbol{\omega}_1) T_{a,2}(\boldsymbol{\omega}_2) \langle I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle + \tilde{i}_{a,2}(\mathbf{R}_1, \boldsymbol{\omega}_1) \tilde{i}_{a,2}(\mathbf{R}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \} d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Вычисление последних трех слагаемых, входящих в формулу (21), не представляет особых трудностей и осуществляется по изложенным выше алгоритмам расчета средней интенсивности. Обсудим более подробно алгоритм вычисления первого слагаемого.

Выше, при рассмотрении средней интенсивности, отмечалось, что восходящую радиацию, рассеянную в подоблачной атмосфере и (или) отраженную от подстилающей поверхности, можно интерпретировать как диффузный источник излучения, определяющий граничные условия на нижней границе облачного слоя, а интенсивности  $I(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\omega}_n)$ ,  $n = 1, 2$  можно записать в виде

$$I(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\omega}_n) = i(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\omega}_n) + j_d(\mathbf{r}_n, \boldsymbol{\omega}_n). \quad (22)$$

Согласно (22) для первого слагаемого (21) имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta\Omega} \int_{\Delta\Omega} T_{a,2}(\boldsymbol{\omega}_1) T_{a,2}(\boldsymbol{\omega}_2) \{ \langle i(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) i(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle + \langle j_d(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) i(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle + \\ &+ \langle i(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) j_d(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle + \langle j_d(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) j_d(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle \} d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23) следует, что для определения  $K_F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  необходимо знать четыре корреляционные функции  $\langle i(\mathbf{x}_1) i(\mathbf{x}_2) \rangle$ ,  $\langle i(\mathbf{x}_1) j_d(\mathbf{x}_2) \rangle$ ,  $\langle j_d(\mathbf{x}_1) i(\mathbf{x}_2) \rangle$ ,  $\langle j_d(\mathbf{x}_1) j_d(\mathbf{x}_2) \rangle$ , которые вычисляются по следующим формулам [13, 14].

*Корреляция  $\langle i(\mathbf{x}_1) i(\mathbf{x}_2) \rangle$ :*

$$\begin{aligned} \langle i(\mathbf{x}_1) i(\mathbf{x}_2) \rangle &= \langle i(z H_1, \boldsymbol{\omega}_1) \rangle \langle i(z H_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle + [u(z H_2, \boldsymbol{\omega}_2) - \langle i(z H_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle] \times \\ &\times M \sum_{n=0}^{N_1} Q_n h_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) \exp(-A_x \Delta x_0 - A_y \Delta y_0), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $h_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1)$  определяется по формуле (11);  $\Delta x_0 = |x_0 - x_2|$ ;  $\Delta y_0 = |y_0 - y_2|$ ;  
 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}_1 + \frac{z_0 - H}{c_1} \boldsymbol{\omega}_1$  – точка начального столкновения в облачном слое (см. рис. 2).

*Корреляция  $\langle j_d(\mathbf{x}_1) i(\mathbf{x}_2) \rangle$ :*

$$\begin{aligned} \langle j_d(\mathbf{x}_1) i(\mathbf{x}_2) \rangle &= \langle j_d(z H_1, \boldsymbol{\omega}_1) \rangle \langle i(z H_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle + [S_d(h, \boldsymbol{\omega}_1) - \langle j_d(z H_1, \boldsymbol{\omega}_1) \rangle] [u(z H_2, \boldsymbol{\omega}_2) - \\ &- \langle i(z H_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle] \exp\{-A_x \Delta x_0 - A_y \Delta y_0\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Корреляция  $\langle i(\mathbf{x}_1)j_d(\mathbf{x}_2) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle i(\mathbf{x}_1)j_d(\mathbf{x}_2) \rangle &= \langle i(z H_1, \boldsymbol{\omega}_1) \rangle \langle j_d(z H_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle + [v_d(z H_2, \boldsymbol{\omega}_2) - \langle j_d(z H_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle] \times \\ &\times M \sum_{n=0}^{N_1} Q_n h_i(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) \exp \{-A_x \Delta x_0 - A_y \Delta y_0\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Корреляция  $\langle j_d(\mathbf{x}_1)j_d(\mathbf{x}_2) \rangle$ . Для пространственно-угловой корреляционной функции  $\langle j_d(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1)j_d(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle$  получены замкнутые уравнения [16], зависящие от положения точек  $\mathbf{r}_i$  и направлений  $\boldsymbol{\omega}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Эти уравнения легко решаются, например, с помощью преобразования Лапласа; конечные формулы весьма громоздки и поэтому здесь не приведены.

Для вычисления дисперсии (19) необходимо выражения (24)–(26) и выражение для  $\langle j_d(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1)j_d(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle$  проинтегрировать по телесному углу поля зрения приемника  $\Delta\Omega$ . Интегрирование по большим телесным углам  $\Delta\Omega$  требует больших затрат компьютерного времени. Задача существенно упрощается в частном, но весьма важном для практики случае, когда излучение регистрируется приемником с небольшим полем зрения. Дело в том, что все функции, входящие в формулы (24)–(26) и для  $\langle j_d(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1)j_d(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \rangle$  и описывающие различные составляющие средней интенсивности, являются гладкими и мало изменяются при небольших вариациях угла наблюдения ([12], [13], [16]). Это означает, что с достаточно высокой степенью точности эти функции можно считать постоянными в пределах малого телесного угла  $\Delta\Omega$  и их можно вынести за знак интеграла по  $\Delta\Omega$ . Обозначим через  $-\boldsymbol{\omega}_r$  направление оптической оси приемника (рис. 2). Тогда для корреляционной функции (24) получаем

$$K_F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle i(H, \boldsymbol{\omega}_r) \rangle^2 (\Delta\Omega)^2 + [u(H, \boldsymbol{\omega}_r) - \langle i(H, \boldsymbol{\omega}_r) \rangle] M \sum_{n=0}^{N_1} Q_n h_i(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) J(\Delta \hat{x}, \Delta \hat{y}), \quad (27)$$

$$\text{где } J(\Delta \hat{x}, \Delta \hat{y}) = \int_{\Delta\Omega} d\boldsymbol{\omega}_1 \int_{\Delta\Omega} d\boldsymbol{\omega}_2 \exp \{-A_x \Delta x_0 - A_y \Delta y_0\}; \quad (28)$$

$$\Delta x_0 = \left| \Delta \hat{x} + (H_r - H) \left( \frac{a_2}{c_2} - \frac{a_1}{c_1} \right) - \frac{a_1}{c_1} (H - z_0) \right|; \quad (29)$$

$$\Delta y_0 = \left| \Delta \hat{y} + (H_r - H) \left( \frac{b_2}{c_2} - \frac{b_1}{c_1} \right) - \frac{b_1}{c_1} (H - z_0) \right|.$$

Если приемник находится на высоко летящем самолете или спутнике, то  $(H_r - H) \gg H - z_0$ , и в (29) можно пренебречь последними слагаемыми. Тогда выражение (26) имеет вид

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle i(H, \boldsymbol{\omega}_r) \rangle^2 (\Delta\Omega)^2 + [u(H, \boldsymbol{\omega}_r) - \langle i(H, \boldsymbol{\omega}_r) \rangle] \langle i(H, \boldsymbol{\omega}_r) \rangle J(\Delta \hat{x}, \Delta \hat{y}) \quad (26')$$

где  $J(\Delta \hat{x}, \Delta \hat{y})$  вычисляется по формуле (28) со значениями

$$\Delta x_0 = \left| \Delta \hat{x} + (H_r - H) \left( \frac{a_2}{c_2} - \frac{a_1}{c_1} \right) \right|, \quad \Delta y_0 = \left| \Delta \hat{y} + (H_r - H) \left( \frac{b_2}{c_2} - \frac{b_1}{c_1} \right) \right|. \quad (29')$$

Интеграл в (28) рассчитывается с помощью метода Монте-Карло. Очевидно, что обсуждаемое выше упрощение может быть использовано и при интегрировании по телесному углу поля зрения приемника  $\Delta\Omega$  остальных трех корреляций  $\langle i(\mathbf{x}_1)j_d(\mathbf{x}_2) \rangle$ ,  $\langle j_d(\mathbf{x}_1)i(\mathbf{x}_2) \rangle$ ,  $\langle j_d(\mathbf{x}_1)j_d(\mathbf{x}_2) \rangle$  (три последних слагаемых формулы (23)).

Таким образом, разработаны алгоритмы метода Монте-Карло для расчета математического ожидания и дисперсии интенсивности отраженной солнечной радиации в трехслойной облачно-аэрозольной атмосфере, расположенной над отражающей по закону Ламберта подстилающей поверхностью. Важной особенностью разработанных алгоритмов является возможность вычисления статистических характеристик интенсивности в заданном направлении наблюдения и, следовательно, изучения достаточно тонких особенностей в угловой структуре отраженного света.

Эта работа частично субсидирована DOE's ARM Program, контракт N 350114-A-Q1.

1. King M. D. // J. Atmos. Sci. 1987. V. 44. N 13. P. 1734–1751.
2. Yi H. C., N. J. McCormick and R. Sanchez. // J. Atmos. Sci. 1990. V. 47. N 21. P. 2567–2579.
3. Green R. N. // J. Atmos. Sci. 1980. V. 37. N 10. P. 2298–2313.
4. King M. D. and Curran R. J. // J. Atmos. Sci. 1980. V. 37. N 6. P. 1262–1278.
5. Gabriel P., Lovejoy S., Schertzer D. and Austin G. L. // Geophys. Res. Lett. 1988. V. 15. P. 1373–1376.
6. Barker H. W., Davies J. A. // J. Atmos. Sci. 1992. V. 49. N 13. P. 1115–1126.
7. Davis A., Gabriel P., Lovejoy S., Schertzer D. and Austin G. L. // J. Geophys. Res. 1990. V. 95. N 8. P. 11729–11742.
8. Малваджи Ф., Помранинг Г. С. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. N 9. С. 1064–1090.
9. Stephens G. L. // J. Atmos. Sci. 1988. V. 45. N 12. P. 1818–1848.
10. Журавлева Т. Б., Титов Г. А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1987. Т. 23. N 7. С. 733–741.
11. Титов Г. А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1985. Т. 21. N 9. С. 940–948.
12. Титов Г. А. // J. Atmos. Sci. 1990. V. 47. N 1. P. 24–38.
13. Журавлева Т. Б., Титов Г. А. // Исследование Земли из космоса. 1989. N 4. С. 35–43.
14. Журавлева Т. Б., Титов Г. А. // Исследование Земли из космоса. 1989. N 5. С. 81–87.
15. Марчук Г. И., Михайлов Г. А. и Назаралиев Н. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 283 с.
16. Журавлева Т. Б., Титов Г. А. Оптико-метеорологические исследования атмосферы. Новосибирск: Наука, 1987. 108 с.

Институт оптики атмосферы  
СО РАН, Томск

Поступила в редакцию  
25 апреля 1994 г.

**E. I. Kasyanov, G. A. Titov. Field of the Reflected Solar Radiation Radiance under Conditions of Broken Cloudiness. Computational Algorithm.**

In this paper we present a generalization of the algorithms developed based on Monte-Carlo method for the case of Poisson model of broken clouds in application to calculations of the mathematical expectation and variance of the intensity of solar radiation reflected in a preset direction. The generalization is made for the case of a three-layer cloudy and aerosol atmosphere over a lambertian underlying surface.