

В.П. Лукин, Ф.Ю. Канев, П.А. Коняев, Б.В. Фортес

## ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ АДАПТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТЬ 2. ДАТЧИКИ ВОЛНОВОГО ФРОНТА И ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В АТМОСФЕРЕ

Продолжено описание численных моделей элементов адаптивной системы. В частности, рассмотрены модели датчика Гартмана и алгоритм «сшивки» фазовой поверхности, имеющей разрывы. Приведены модели ряда исполнительных элементов – модального и зонального корректоров, сегментированного зеркала и две модели (статическая и динамическая) упругого зеркала.

### 1. «Идеальное» устройство регистрации фазы и алгоритм «сшивки» фазовой поверхности

При численном решении задач адаптивной оптики достаточно часто используются модели «идеальных» приборов, выполняющих в рассматриваемых системах функции оптических элементов без ограничений, свойственных реальным физическим устройствам. К подобным моделям относится модель идеального адаптивного зеркала, позволяющая задать произвольный фазовый профиль, модель идеального датчика фазы, идеальное устройство обращения волнового фронта и т.д. Несмотря на то, что все эти модели являются математической абстракцией, они позволяют провести качественный (без учета ограничений, вносимых отдельными элементами) анализ управления пучком в атмосфере.

В идеальном датчике волнового фронта фазовое распределение

$$\varphi(x, y) = \text{Arg}(E),$$

где  $E$  – комплексная амплитуда поля. Поскольку аргумент комплексного числа не является однозначной функцией, это выражение можно использовать только для фазовых поверхностей, непрерывных в интервале  $[-\pi; +\pi]$ . Для устранения ограничения необходимо получить полную фазу поля

$$\varphi(x, y) = \text{Arg}(E) = \arg(E) + 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

т.е. определить параметр  $m$  (целое число) в каждой точке сечения пучка из условия непрерывности поверхности. Отметим, что это условие невыполнимо при наличии дислокаций волнового фронта. В остальных случаях для получения неусеченного распределения фазы можно воспользоваться стандартной техникой восстановления двумерной функции [1] по значениям ее первых разностей, вычисляемых в узлах  $(I, J)$  расчетной сетки как

$$\Delta_{I,J}^x = \arg(E_{I,J}^* E_{I+1,J}), \quad \Delta_{I,J}^y = \arg(E_{I,J}^* E_{I,J+1}), \quad I, J = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2)$$

$N$  – размерность сетки. Нетрудно показать, что дискретное преобразование Фурье (ДПФ) суммы вторых разностей искомой функции

$$\Delta_{I,J} = \Delta_{I,J}^{xx} + \Delta_{I,J}^{yy} = \Delta_{I+1,J}^x - \Delta_{I-1,J}^x + \Delta_{I,J+1}^y - \Delta_{I,J-1}^y \quad (3)$$

связано с ДПФ искомой функции соотношением

$$\tilde{\Delta}_{K,L} = \tilde{\Phi}_{K,L} 2 [\cos (2\pi K / N) + \cos (2\pi L / N) - 2], \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{K,L} &= \sum_{I=0}^{N-1} \sum_{J=0}^{N-1} \varphi_{I,J} \exp \left( i \frac{2\pi}{N} [IK + JL] \right); \\ \tilde{\Delta}_{K,L} &= \sum_{I=0}^{N-1} \sum_{J=0}^{N-1} \Delta_{I,J} \exp \left( i \frac{2\pi}{N} [IK + JL] \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что для восстановления фазы нужно вычислить обратное ДПФ от

$$\tilde{\Phi}_{K,L} = \frac{\tilde{\Delta}_{K,L}}{2 [\cos (2\pi K / N) + \cos (2\pi L / N) - 2]} \quad (6)$$

т.е. искомая функция находится как

$$\varphi_{I,J} = \frac{1}{N^2} \sum_{K=0}^{N-1} \sum_{L=0}^{N-1} \tilde{\Phi}_{K,L} \exp \left( -i \frac{2\pi}{N} [IK + JL] \right). \quad (7)$$

Фактически этот алгоритм эквивалентен алгоритму решения сеточного представления уравнения Пуассона с периодическими граничными условиями. Различные варианты алгоритмов оценивания фазы по ее разностям, полученным из интерферометрических датчиков волнового фронта, решают то же самое уравнение. Поэтому рассматриваемый алгоритм восстановления полной фазы по известной комплексной амплитуде можно рассматривать и как способ моделирования интерферометрического датчика с пространственным разрешением, совпадающим с шагом вычислительной сетки. При наличии дислокаций волнового фронта применение описанного алгоритма дает сглаженную фазу, не совпадающую с аргументом исходной комплексной амплитуды.

## 2. Модель датчика Гартмана

В реальных системах адаптивной оптики для регистрации фазовой поверхности обычно используется датчик Гартмана, схематичное изображение которого представлено на рис. 1. В соответствии с конструкцией прибора в построенной нами численной модели был реализован следующий алгоритм:

1. Задание параметров датчика (задание числа субапертур и размеров всей апертуры).
2. Выделение из комплексной амплитуды поля участка, падающего на субапертуру, и обнуление поля за пределами субапертуры.
3. Умножение выделенной части поля на аподизирующую функцию вида

$$\rho(x, y) = \exp \left[ - (x^8 + y^8) / a_0^8 \right], \quad (8)$$

где  $a_0$  – радиус субапертуры, центр системы координат помещен в центр субапертуры. Операция выполняется прежде всего для уменьшения сеточных искажений при численном решении задачи распространения.

4. Решение задачи распространения для поля, полученного в результате операций 2 и 3. При этом полагается, что каждая из субапертур, расположенных в плоскости датчика 1 (см. рис. 1), фокусирует соответствующий участок поля в плоскость наблюдения 2.

5. Вычисление локальных (в пределах субапертуры) смещений центра тяжести пучка ( $dx_k$ ,  $dy_k$ ) относительно невозмущенного положения и вычисление локальных наклонов ( $S_k^x = dx_k/F$ ,  $S_k^y = dy_k/F$ , здесь  $k$  – индекс субапертуры;  $F$  – фокусное расстояние).

Операции 2 – 5 выполняются для каждой из субапертур, после завершения этого цикла выполняется п. 6.

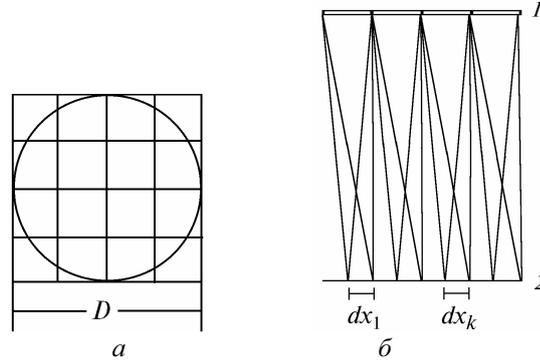


Рис. 1. Схематическое изображение датчика Гартмана: *a* – апертура датчика; *б* – распространение лучей в датчике от плоскости апертуры (1) до плоскости регистрации (2) и выделение локальных смещений центра тяжести пучка

6. Задание фазовой поверхности набором полиномов Цернике. Коэффициенты полиномов находятся по методу наименьших квадратов из условия минимума квадратичной ошибки

$$\Delta^2 = \sum_{k=1}^{N_s} \left\{ \left( S_k^x - \sum_{l=1}^{N_z} A_l Z_{lk}^x \right)^2 + \left( S_k^y - \sum_{l=1}^{N_z} A_l Z_{lk}^y \right)^2 \right\}. \quad (9)$$

Здесь  $N_s$  – число субапертур;  $N_z$  – число полиномов;  $S_k^x, S_k^y$  – локальные наклоны в пределах  $k$ -й субапертуры по осям  $x$  и  $y$  соответственно;  $A_l$  – коэффициенты полиномов;  $Z_{lk}^x, Z_{lk}^y$  – коэффициенты наилучшей (в квадратичном смысле) аппроксимации полинома  $Z_l$  линейной функцией  $x Z_{lk}^x + y Z_{lk}^y + C_{lk}$  на этой субапертуре. Решение системы уравнений (9) (определение коэффициентов  $A_l$ ) означает, что из распределения интенсивности найден фазовый профиль пучка, представленный набором полиномов Цернике.

Результаты численных экспериментов по коррекции атмосферных искажений лазерного излучения с использованием описанной модели датчика Гартмана приведены в [2].

### 3. Зональный корректор

При построении модели зонального корректора отражающая поверхность зеркала  $W(x, y)$  была представлена линейной комбинацией функций отклика сервоприводов:

$$W(x, y) = \sum_{l=1}^N A_l I_l(x, y), \quad (10)$$

где  $N$  – число приводов;  $A_l$  – амплитуда смещения;  $I_l$  – функция отклика  $l$ -го привода соответственно. Полагалось, что сервоприводы имеют гауссову функцию отклика.

Аппроксимация зеркалом фазового профиля  $\varphi(x, y)$  выполнялась на основе метода наименьших квадратов, коэффициенты  $A_l$  находились из условия минимума для

$$\Delta^2 = \iint_S (\varphi(x, y) - W(x, y))^2 dx dy, \quad (11)$$

где  $S$  – площадь апертуры корректора.

Несмотря на то, что в отличие от рассматриваемого корректора форма функций отклика реального зеркала не является симметричной и зависит от геометрии прибора (в частности, от

выбора положения точек фиксации зеркала, от конфигурации расположения приводов и т.д.), в некоторых случаях использование данной упрощенной модели позволяет выполнить анализ работы адаптивной системы с удовлетворительной точностью [3].

#### 4. Модальный корректор

Во многих теоретических исследованиях работы адаптивной системы поверхность зеркала представляется как суперпозиция полиномов (обычно полиномов Цернике) [4, 5]:

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^{N_z} A_i Z_i(x, y), \quad (12)$$

где  $i$  – номер полинома;  $N_z$  – число полиномов, используемых при построении модели;  $A_i$  – полиномиальный коэффициент,

$$\begin{aligned} Z_i(x, y) &= R_n^m(x, y) \cos(m\varphi) \text{ для четных номеров } i, \\ Z_i(x, y) &= R_n^m(x, y) \sin(m\varphi) \text{ для нечетных номеров } i, \\ Z_i(x, y) &= R_n^m(x, y) \text{ для } m = 0, \end{aligned}$$

здесь  $m$  – азимутальная частота;  $\varphi$  – полярный угол,

$$R_n^m(x, y) = \sum_{j=1}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^j (n-j)! (x^2 + y^2)^{(n-2j)/2}}{j! [(n+m)/2 - j]! [(n+m)/2 + j]!}.$$

С использованием рассматриваемой модели был проведен ряд исследований зависимости качества компенсации атмосферных искажений от числа полиномов Цернике  $N_z$ , воспроизводимых корректором [6, 7]. Выполненные расчеты показали, что с помощью модального корректора можно определить, насколько сложной должна быть фазовая поверхность для компенсации искажений в различных условиях, а также приближенно прогнозировать необходимое количество приводов адаптивного зеркала.

#### 5. Сегментированное зеркало

Отражающая поверхность сегментированного зеркала представляет собой набор элементов квадратной или гексагональной формы, вписанных в круглую апертуру (рис. 2). Используемая нами численная модель позволяла варьировать количество сегментов и число степеней свободы каждого из них от одной (задается только смещение) до трех (задается смещение и наклоны относительно двух взаимно перпендикулярных осей).

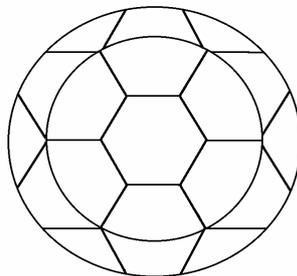


Рис. 2. Сегментированное зеркало с гексагональными элементами

Воспроизведение заданной фазовой поверхности сегментированным корректором выполнялось методом наименьших квадратов. Точность воспроизведения и эффективность зеркала в задаче компенсации атмосферной турбулентности рассматривались в [8].

## 6. Статическая модель упругого зеркала

В качестве упругого зеркала в численных экспериментах использовалась модель тонкой однородной пластины. Статические деформации пластины описывались уравнением бигармонического типа [9]:

$$D \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = f(x, y), \quad (13)$$

где  $(x, y)$  – координаты в плоскости пластины;  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $f$  – поперечная нагрузка. Граничные условия в точках жесткого закрепления зеркала на опоре (в этих точках пластина не смещается, при задании наклона возникают деформации) записываются в виде

$$W|_{(x_i, y_i)} = \frac{\partial W}{\partial n}|_{(x_i, y_i)} = 0, \quad (14)$$

для шарнирно опертой точки (т.е. при задании наклона деформаций не возникает):

$$W|_{(x_0, y_0)} = D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right)|_{(x_0, y_0)} = 0. \quad (15)$$

Здесь  $\partial/\partial n$ ,  $\partial/\partial \tau$  – производные по нормали и по касательной к плоскости пластины;  $\sigma$  – коэффициент Пуассона.

Численное решение уравнения (13) было выполнено на основе метода конечных элементов [10]. В соответствии с методом пластина разбивалась на множество элементов, с каждым из которых связывалась локальная система координат ( $O\xi$ ,  $O\eta$ ). Деформации каждого из элементов описывались вектором

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \varphi \\ \eta \end{Bmatrix},$$

здесь  $\xi$  – вектор поперечных смещений угловых точек элемента (узлов расчетной сетки);  $\varphi$ ,  $\eta$  – векторы углов наклона относительно осей  $O\xi$ ,  $O\eta$ . Вектор  $\mathbf{w}$  имеет  $3 N_e$  компонент;  $N_e$  – число узлов сетки, ограничивающей элемент.

С вектором обобщенных координат  $\mathbf{w}$  связан вектор обобщенных сил  $\mathbf{Q}$ , имеющий следующую структуру:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{T} \end{Bmatrix},$$

$\mathbf{P}$  – вектор перерезывающих сил;  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T}$  – векторы изгибающих моментов относительно осей локальной системы координат. Связь между  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{Q}$ , найденная по методу виртуальных перемещений, имеет вид [10]

$$[k] \mathbf{w} - \mathbf{f} = \mathbf{Q}. \quad (16)$$

Первое слагаемое в левой части уравнения (16) представляет обобщенные силы упругости ( $[k]$  – матрица жесткости элемента), второе – внешние силы. В правой части помещены силы взаимодействия между элементами. Матрица жесткости  $[k]$  находится как интеграл от плотности потенциальной энергии элемента, при этом вычисления существенно упрощаются с введением ограничений на форму прогиба [10]. Для формы прогиба, описанной конечным рядом степенных функций, матрица  $[k]$  вычислена и приведена в [10].

Учитывая условия сопряжения элементов, вытекающие из требования непрерывности поля перемещений модели в целом и уравновешенности сил взаимодействия между элементами, возможно получить уравнение, описывающее статические деформации всей модели:

$$[K] \mathbf{W} = \mathbf{F}. \quad (17)$$

Здесь  $\mathbf{W}$  – вектор обобщенных координат модели;  $\mathbf{F}$  – вектор внешних сил (оба вектора имеют размерность  $3 N_m$ , где  $N_m$  – общее число узлов модели). Матрица жесткости пластины  $[K]$  также находится из условий сопряжения элементов, размерность матрицы  $3 N_m \times 3 N_m$ . Здесь необходимо подчеркнуть, что для сеток, даже достаточно «грубых», работа с матрицей  $[K]$  затруднена из-за большого количества ее элементов (в основном это относится к операциям обращения матрицы и переноса данных с твердого диска в оперативную память, последняя процедура требует очень много времени). Так, для сетки  $9 \times 9$ , ( $N_m = 81$ ) матрица  $[K]$  имеет размерность  $243 \times 243$ .

Размерность матрицы жесткости  $[K]$  может быть понижена [10] (выполнена редукция), а операции с ней облегчены при условии, если на модель действуют только поперечные силы, т.е. вектор  $\mathbf{F}$ , входящий в (17), имеет структуру

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

В этом случае элементы матрицы жесткости, на которые умножаются нулевые компоненты вектора  $\mathbf{F}$ , могут быть исключены заранее. Вторая редукция матрицы  $[K]$  выполняется на основе данных о геометрии расположения приводов зеркала, при этом полагается, что в точках, где приводы отсутствуют, на модель не оказывают воздействия внешние силы. В результате операций редукции размерность матрицы уменьшается до  $N_{act} \times (N_m - N_{act})$  ( $N_{act}$  – число приводов), т.е. для сетки  $9 \times 9$  и зеркала с 5-ю приводами размерность матрицы будет  $5 \times 76$ , что значительно меньше, чем до выполнения редукции.

## 7. Численная модель динамического зеркала

В процессе работы над проектом адаптивной системы нами была построена численная модель динамического зеркала, позволяющая регистрировать переходные процессы, возникающие при деформациях упругой пластины. В этом случае прогиб отражающей поверхности  $W(x, y)$  описывался матричным уравнением, которое, как и уравнение (17), получено на основе принципа виртуальных работ [10]

$$[M] \ddot{\mathbf{W}} + [G] \dot{\mathbf{W}} + [K] \mathbf{W} = \mathbf{F}. \quad (18)$$

Здесь  $[M]$ ,  $[G]$  и  $[K]$  – матрицы инерции, затухания колебаний и жесткости соответственно,  $\mathbf{F}$  – вектор внешних сил. Система уравнений (18) решалась методом Рунге–Кутты [11]. Результатом решения системы являлось динамическое поле поперечных смещений узлов модели, описывающее движение пластины под действием заданных сил. На основе этой расчетной схемы были построены модели зеркал, приведенные на рис. 3, а, б.

Переходные процессы, возникающие при воспроизведении динамическим корректором заданной поверхности, иллюстрируются на рис. 4, 5. Здесь приведены смещения точек зеркала, расположенных на его радиусе (см. рис. 3) и квадратичное отклонение  $\varepsilon(t)$  поверхности корректора  $W(x, y, t)$  от заданного профиля  $\varphi(x, y)$ , которое находилось по формуле

$$\varepsilon(t) = \frac{\int \int (\varphi(x, y) - W(x, y, t))^2 \rho(x, y) dx dy}{\int \int \varphi(x, y)^2 \rho(x, y) dx dy}, \quad (19)$$

здесь  $\rho$  – весовая функция.

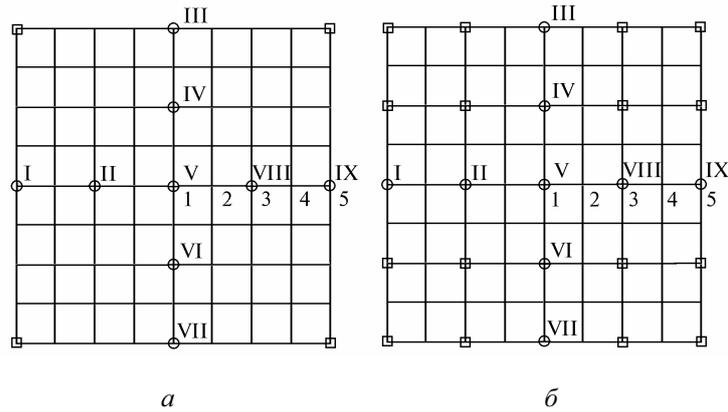


Рис. 3. Модели динамического упругого зеркала;  $\circ$  – точки расположения серво-приводов,  $\square$  – точки закрепления зеркала на опоре. На моделях указаны номера точек, в которых регистрировались смещения поверхности. Сервоприводы пронумерованы римскими цифрами

Рассмотрим точность аппроксимации параболической поверхности упругим зеркалом, воздействия  $\mathbf{F}$  находились методом наименьших квадратов. В уравнение (17) вектор  $\mathbf{F}$  был введен следующим образом (ступенчатая форма воздействия):

$$\mathbf{F} = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ (f_1, f_2, \dots, f_n), & t \leq 0, \end{cases} \quad (20)$$

здесь  $f_i$  – компоненты вектора  $\mathbf{F}$ ;  $n$  – общее число сервоприводов.

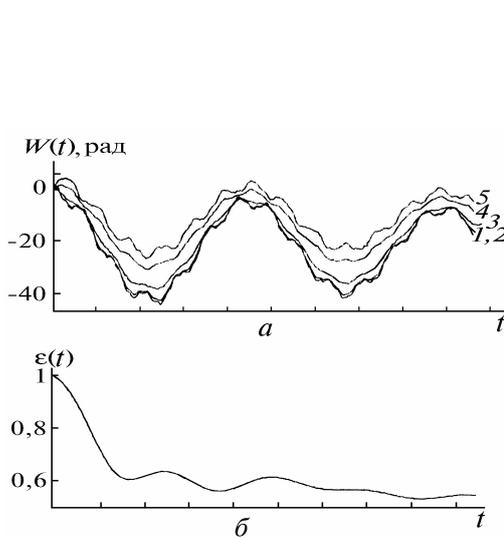


Рис. 4. Переходные процессы для модели зеркала, приведенной на рис. 3, *a* – смещения отражающей поверхности в точках 1–5, *б* – квадратичная ошибка  $\varepsilon(t)$

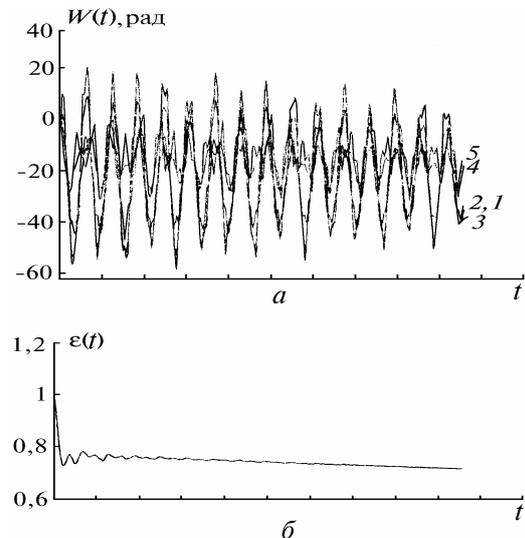


Рис. 5. Переходные процессы для модели зеркала, приведенной на рис. 3, *б*

Коэффициент затухания выбирался достаточно малым, поэтому на рисунках практически незаметно уменьшение колебаний поверхности. Амплитуда колебаний функции  $\varepsilon$  невелика по сравнению с его значениями, но качество воспроизведения поверхности при отсутствии затухания следует признать неудовлетворительным (для аналогичного статического зеркала при воспроизведении фокусировки  $\varepsilon$  составляет 0,10 – 0,12 [12]). Из приводимых данных также видно увеличение частоты при уменьшении расстояния от закрепленных точек до точек приложения сил.

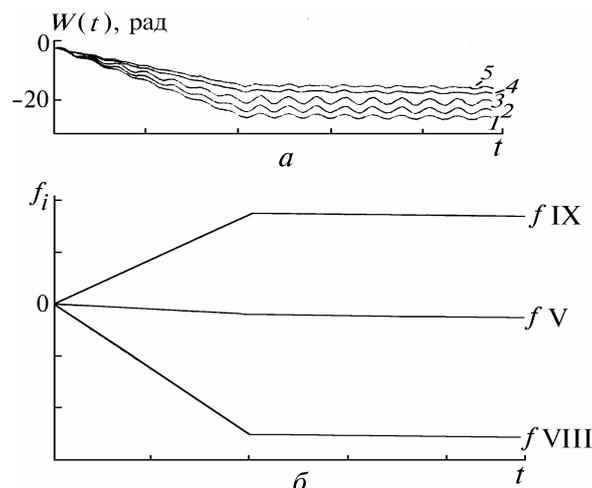


Рис. 6. Колебания поверхности зеркала. *a* – переходные процессы при постепенном возрастании нагрузки на зеркало, модель корректора соответствует рис. 3, *б*; *б* – изменение сил, действующих на зеркало в точках V, VIII, IX

Ранее рассматривалось применение динамического зеркала в алгоритме апертурного зондирования [13]. При этом было показано, что для выделения вариаций зондирующего излучения до завершения переходных процессов необходимо введение фильтрации сигнала. В настоящее время проводится исследование эффективности фазового сопряжения с учетом собственных колебаний отражающей поверхности корректора. Здесь предполагается уменьшить влияние переходных процессов на алгоритм управления, изменяя способ воздействия на зеркало. В качестве иллюстрации на рис. 6 показаны колебания поверхности при воздействии, для которого компоненты вектора **F** не изменяются во времени ступенчато, а нарастают довольно плавно. Наблюдается значительное уменьшение амплитуды колебаний.

1. Freid D.L., Vaughn J.L. // Appl. Opt. 1992. V. 31. N 15. P. 2865–2882.
2. Лукин В.П., Майер Н.Н., Фортес Б.В. // Оптика атмосферы. 1992. Т. 5. N 12. С. 1241–1251.
3. Tyson R. K. // Opt. Eng. 1990. V. 29. N 10. P. 1165–1173.
4. Коняев П.А., Лукин В.П., Фортес Б.В. // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. N 4. С. 71–75.
5. Novoseller D. E. // JOSA A. 1988. V. 5. N 10. P. 1937–1942.
6. No11 R. J. // JOSA. 1976. V. 66. N 3. P. 207–211.
7. Roddier N. // Opt. Eng. 1990. V. 29. N 10. P. 1174–1180.
8. Лукин В.П., Канев Ф.Ю., Фортес Б.В. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 12. С. 1324–1328.
9. Огибалов П.М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. М.: Изд-во МГУ, 1958. 168 с.
10. Кандидов В.П., Чесноков С.С., Выслоух В.А. Метод конечных элементов в задачах механики. М.: Изд-во МГУ, 1976. 178 с.
11. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 376 с.
12. Канев Ф.Ю., Лавринов Л.Н., Лукин В.П. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. N 8. С. 962–968.
13. Канев Ф.Ю., Лукин В.П., Лавринов Л.Н., Чесноков С.С. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. N 12. С. 1483–1489.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
27 сентября 1994 г.

V.P. Lukin, F.Ju. Kanev, P.A. Konyaev, B.V. Fortes. **Numerical Model of an Adaptive Optical System. P. 2. Wave Front Sensors and Executive Devices.**

The description of numerical models of an adaptive system elements is continued in the second part of the paper. Particularly, the models of Hartmann sensor and an algorithm of a broken phase surface joining. The models of a series of executive devices are also presented, i.e. modal and zonal correctors, segmented mirror as well as two models (statistical and dynamical) of elastic mirror.