

А.В. Прокопов

К ТЕОРИИ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ

Развит новый метод теоретического исследования астрономической рефракции в трехмерно-неоднородной земной атмосфере. Метод базируется на использовании интегрального лучевого приближения геометрической оптики, которое сводит задачу рефракции к решению системы алгебраических уравнений для отыскания углов рефракции и длины искривленного в земной атмосфере участка лучевой траектории.

На примере сферически-слоистой модели земной атмосферы показано, что предложенный метод может обеспечить заданную точность определения рефракции в диапазоне видимых зенитных углов $0^\circ < z < 90^\circ$.

1. Введение

Одним из основных факторов, ограничивающих точность наблюдательных методов классической и современной астрометрии, является рефракция электромагнитного излучения в неоднородной земной атмосфере. Несмотря на многолетнюю историю изучения астрономической рефракции [1–3], в теории этого явления все еще остаются некоторые пробелы – отсутствует, в частности, исчерпывающее теоретическое исследование аномалий астрономической рефракции в трехмерно-неоднородной земной атмосфере, слабо разработаны вопросы рефракции в близгоризонтной зоне [4].

При рассмотрении этих вопросов очень часто используются априорные аналитические модели трехмерного атмосферного профиля, допускающие точное интегрирование уравнений рефракции [5], либо осуществляется численное решение исходных лучевых уравнений, например, по схеме Гарцера [6]. Точность интегрируемых моделей, однако, может оказаться недостаточной, а численное решение лучевых уравнений требует предварительного определения трехмерного профиля показателя преломления воздуха, что не всегда осуществимо на практике.

В связи с этим в настоящей статье предлагается новый подход к решению задачи рефракции, цель которого – преодолеть ограничения известных методов и восполнить имеющиеся пробелы в теории астрономической рефракции в трехмерно-неоднородной земной атмосфере.

2. Общие соотношения

В рамках предлагаемого метода используется лучевое уравнение геометрической оптики [7]

$$\frac{d}{d\sigma}(n\mathbf{l}) = \nabla n, \quad (1)$$

где ∇ – оператор градиента; $n = n(\mathbf{r})$ – показатель преломления воздуха; $\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}$ – орт касательной к траектории луча; σ – лучевая координата; \mathbf{r} – радиус-вектор точки на луче.

Рассмотрим первый интеграл уравнения (1)

$$n_L \mathbf{l}_L - n_0 \mathbf{l}_0 = \int_0^D \nabla n d\sigma, \quad (2)$$

где n_0, \mathbf{l}_0 – соответственно показатель преломления воздуха и орт касательной к лучевой траектории в точке наблюдения; n_L, \mathbf{l}_L – аналогичные величины в точке пересечения лучевой траектории с верхней границей земной атмосферы (принимается, что луч, пересекающий эту верхнюю граничную поверхность земной атмосферы, далее распространяется к объекту наблюдения уже в вакууме по прямой линии, направление которой задается вектором \mathbf{l}_L); D – длина

искривленного в земной атмосфере участка лучевой траектории, т.е. длина траектории луча от исходной точки наблюдения до точки его пересечения с верхней границей атмосферы.

С помощью разложения Эйлера–Маклорена [8] уравнение (2) можно представить в виде [9]

$$n_L I_L - n_0 I_0 = \frac{\nabla n_0 + \nabla n_L}{2} D - \frac{D^2}{12} (\nabla n_L^I - \nabla n_0^I) + \frac{D^4}{720} (\nabla n_L^{III} - \nabla n_0^{III}) - \frac{D^6}{30240} (\nabla n_L^V - \nabla n_0^V) + \dots, \quad (3)$$

где $\nabla n^I = \frac{d \nabla n}{d \sigma}$; $\nabla n^{III} = \frac{d^3 \nabla n}{d \sigma^3}$; $\nabla n^V = \frac{d^5 \nabla n}{d \sigma^5}$; ...; $\frac{d}{d \sigma}$ – оператор дифференцирования по лучевой координате; индексы «0» и «L» здесь, как и ранее, относятся соответственно к точке наблюдения и к точке пересечения луча с верхней границей атмосферы.

Так как по определению верхней границы земной атмосферы $n_L = 1$; $\nabla n_L = \nabla n_L^I = \nabla n_L^{III} = \dots = 0$, то исходное уравнение астрономической рефракции (3) можно представить в более простом виде

$$I_L - n_0 I_0 = \nabla n_0 \frac{D}{2} + \nabla n_0^I \frac{D^2}{12} - \nabla n_0^{III} \frac{D^4}{720} + \nabla n_0^V \frac{D^6}{30240} - \dots \quad (4)$$

Векторное уравнение (4) соответствует системе трех скалярных уравнений для трех неизвестных α , α_T , D (углы вертикальной α и боковой α_T рефракции легко вводятся в рассмотрение при расписывании векторного уравнения (4) в проекциях с учетом того, что вектор I_L описывает истинное, а вектор I_0 – видимое направление на наблюдаемый объект; для декартовой системы координат эта процедура выполнена в [10]).

Следует подчеркнуть две важные особенности уравнения (4) как интегрального представления лучевого уравнения (1). Во-первых, все коэффициенты в (4) определяются вблизи точки наблюдения, следовательно, для расчета рефракции при таком подходе не требуется отыскивать вертикальный профиль показателя преломления воздуха. Во-вторых, при выводе уравнения (4) не сделано никаких ограничивающих предположений относительно профиля показателя преломления – уравнение (4) справедливо в обычных для приближения геометрической оптики условиях [7], так что этот профиль может быть достаточно произвольным.

Пределы применимости уравнения (4) зависят от числа учитываемых членов разложения в его правой части. Наиболее простой вариант, когда в правой части (4) учитывается лишь первый член ряда (пропорциональный D^1), рассмотрен в работе [10], где получены обобщения теоремы Ориани–Лапласа [1, 11] на случай трехмерно-неоднородной атмосферы, т.е. определены горизонтальная и боковая аномалии рефракции, связанные с горизонтальными составляющими градиента показателя преломления воздуха. Результаты работы [10] согласуются с результатами статьи [4] и справедливы для зенитных углов $z < 70^\circ$. Более широкий диапазон зенитных углов охвачен в работе [12], где решение уравнения (4) было получено с учетом членов, пропорциональных D^1 , D^2 , D^4 .

Задача настоящей статьи – рассмотреть случай произвольных зенитных углов и получить решение, учитывающее произвольное число членов разложения в правой части (4).

3. Рефракция в сферически-слоистой модели атмосферы

При точных вычислениях угла рефракции для зенитных расстояний $z > 70^\circ$ возникает необходимость учета дополнительных членов ряда (4). При этом особое значение приобретает вопрос о его сходимости. Рассмотрим данный вопрос на примере сферически-слоистой атмосферы, когда боковая рефракция отсутствует и задача упрощается (неизвестными остаются лишь угол вертикальной рефракции α и длина D).

В этом случае $n = n(r)$, $\nabla n = g \mathbf{r}/r$, где \mathbf{r} – радиус-вектор точки в сферической системе координат с началом в центре Земли; $r = |\mathbf{r}|$ – расстояние от центра Земли до точки с радиусом-вектором \mathbf{r} ; $g = \frac{dn}{dr}$ – вертикальный градиент показателя преломления воздуха.

Учитывая, что луч в рассматриваемом случае является плоской кривой, производную любого порядка от величины ∇n по лучевой координате можно представить в виде

$$\nabla n^{(i)} = \frac{d^i \nabla n}{d \sigma^i} = \frac{r_0}{r_0} R_i + I_0 L_i, \quad (5)$$

где $(i) = 0, I, II, III, IV, V, \dots$ при $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, а коэффициенты R_i, L_i определяются непосредственно в результате вычисления соответствующих производных от величины ∇n . Например, из очевидной формулы

$$\nabla n_0^0 = \nabla n_0 = g r_0 / r_0$$

следует, что

$$R_0 = g; L_0 = 0.$$

Вычисляя далее производную

$$\nabla n_0^1 = \frac{d \nabla n_0}{d \sigma} = \frac{r_0}{r_0} \cdot \frac{(I_0 r_0)}{r_0} \left[g' - \frac{g}{r_0} \right] + I_0 \frac{g}{r_0},$$

где $g' = \frac{dg}{dr}$, видим, что

$$R_1 = \frac{(I_0 r_0)}{r_0} \left[g' - \frac{g}{r_0} \right]; L_1 = \frac{g}{r_0}.$$

Проводя аналогичные вычисления для ∇n_0^{III} , найдем

$$R_3 = \frac{(I_0 r_0)}{r_0} \left\{ 3 \frac{g''}{r_0} - 9 \frac{g'_2}{r_0} + 9 \frac{g_3}{r_0} + 3 \frac{g g''}{n_0} + \frac{(g')^2}{n_0} - 7 \frac{g g'}{n_0 r_0} - 3 \frac{g'_2 g^2}{n_0} + 6 \frac{g^2}{n_0 r_0} + \frac{g^3}{n_0 r_0} + \frac{(I_0 r_0)^2}{r_0} \times \right. \\ \left. \times \left[g''' - \frac{6 g''}{r_0} + 15 \frac{g'_2}{r_0} - 15 \frac{g_3}{r_0} - \frac{(g')^2}{n_0} - 3 \frac{g g''}{n_0} + 3 \frac{g^2 g'}{n_0} + 11 \frac{g g'}{n_0 r_0} - 3 \frac{g^3}{n_0 r_0} - 10 \frac{g^2}{n_0 r_0} \right] \right\},$$

где

$$g'' = \frac{d^2 g}{dr^2}; g''' = \frac{d^3 g}{dr^3}; L_3 = 3 \frac{g'_2}{r_0} - 3 \frac{g_3}{r_0} + 3 \frac{g g'}{n_0 r_0} - 3 \frac{g^2}{n_0 r_0} - \frac{g^3}{n_0 r_0} + \frac{(I_0 r_0)^2}{r_0} \left[-7 \frac{g g'}{n_0 r_0} + 7 \frac{g^2}{n_0 r_0} + 3 \frac{g^3}{n_0 r_0} + 3 \frac{g''}{r_0} - 9 \frac{g'_2}{r_0} + 9 \frac{g_3}{r_0} \right]$$

и т.д.

Далее, умножая скалярно уравнение (4) поочередно на I_0 и на r_0/r_0 , получим с учетом (5) систему уравнений

$$\cos \alpha - n_0 = A, \quad \cos(\alpha + z) - n_0 \cos z = B, \quad (6)$$

где $\alpha = \arccos(I_0 I_L)$ – угол вертикальной рефракции; $z = \arccos(I_0 r_0)$ – видимое зенитное расстояние (зенитный угол); величины A, B определены соотношениями

$$A = \frac{D}{2} R_0 \cos z + \frac{D^2}{12} (R_1 \cos z + L_1) - \frac{D^4}{720} (R_3 \cos z + L_3) + \frac{D^6}{30240} (R_5 \cos z + L_5) - \dots$$

$$B = \frac{D}{2} R_0 + \frac{D^2}{12} (R_1 + L_1 \cos z) - \frac{D^4}{720} (R_3 + L_3 \cos z) + \frac{D^6}{30240} (R_5 + L_5 \cos z) - \dots$$

Система уравнений (6) позволяет определить искомые неизвестные α и D . Вводя обозначения

$$T = \frac{D^2}{12} L_1 - \frac{D^4}{720} L_3 + \frac{D^6}{30240} L_5 - \dots, \quad (7)$$

$$S = \frac{D}{2} R_0 + \frac{D^2}{12} R_1 - \frac{D^4}{720} R_3 + \frac{D^6}{30240} R_5 - \dots, \quad (8)$$

решение этой системы удобно представить в виде

$$\alpha = (-1)^k \arcsin \{ \sin z [n_0 + T] \} + k\pi - z, \quad (9)$$

где $k = 0$ при $0 \leq \alpha + z \leq \pi/2$, $k = 1$ при $\alpha + z > \pi/2$, причем величина D (т.е. длина искривленного в земной атмосфере участка лучевой траектории), определяющая параметр T , отыскивается в результате решения алгебраического уравнения

$$1 = [(n_0 + T) \cos z + S]^2 + \sin^2 z [n_0 + T]^2, \quad (10)$$

где T и S заданы соответственно формулами (7), (8).

Полученное решение обобщает рассмотренный в [12] частный случай решения системы (6), учитывающего лишь члены разложения, пропорциональные D , D^2 и D^4 , на общий случай произвольного числа членов разложения.

Отметим, что при $r_0 \rightarrow \infty$ (приближение «плоской Земли») можно положить $T = 0$, тогда уравнения (9), (10) становятся независимыми и из формулы (9) после разложения в ряд по степеням $n_0 - 1 \ll 1$ получаем известное соотношение теоремы Ориани–Лапласа [1, 2]

$$\alpha = (n_0 - 1) \operatorname{tg} z, \quad (11)$$

справедливое согласно данным неоднократно проводившихся численных расчетов для $z < 70^\circ$ с погрешностью, не превышающей нескольких десятых угловой секунды [11].

Для $z = 90^\circ$ формулы (9), (10) дают соотношение

$$\alpha = |g| D/2,$$

формально совпадающее с известным [13] соотношением для оценки угла геодезической рефракции на горизонтальной трассе длиной D .

В рамках излагаемой в настоящей статье теории нетрудно дать аналитическую оценку критерия применимости теоремы Ориани–Лапласа (11). С помощью приведенных выше формул (6) – (10) эта оценка может быть представлена в виде

$$\operatorname{tg}^2 z \ll |g'| r_0 / |g|. \quad (12)$$

Для углов $z > 70^\circ$, когда условие (12) не выполняется, $T \neq 0$, и для вычисления рефракции α необходимо решать уравнение (10). Количество учитываемых при этом в соотношениях (7), (8) членов разложения определяется требуемой точностью вычисления угла рефракции и зависит от скорости сходимости рядов (7), (8).

Рассмотрим вопрос о сходимости в наиболее неблагоприятном случае: $z = 90^\circ$ (отметим, что при $z = 90^\circ$ каноническое разложение классического интеграла рефракции вообще расходится [1]). В данном случае $R_0 = g$; $R_1 = R_3 = \dots = 0$ и система уравнений (6) принимает вид

$$\cos \alpha - n_0 = \frac{D^2}{12} L_1 - \frac{D^4}{720} L_3 + \frac{D^6}{30240} L_5 - \dots, \quad (13)$$

$$-\sin \alpha = g \frac{D}{2}. \quad (14)$$

Определив D из (14) и подставив в (13), после разложения $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ в ряды по степеням $\alpha \ll 1$, получаем

$$0 = (n_0 - 1) + \alpha^2 B_2 + \alpha^4 B_4 + \alpha^6 B_6 + \dots, \quad (15)$$

где

$$B_2 = \frac{1}{2} + \frac{L_1}{3|g|^2}; B_4 = -\frac{1}{24} - \frac{L_1}{9|g|^2} - \frac{L_3}{45|g|^4};$$

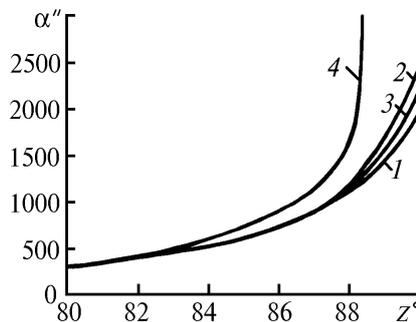
$$B_6 = \frac{1}{720} + \frac{2}{135} \left[\frac{L_1}{|g|^2} + \frac{L_3}{|g|^4} \right] + \frac{2}{945} \frac{L_5}{|g|^6}; \quad |g| = -g.$$

Приближенные оценки коэффициентов уравнения (15), выполненные для стандартной (политропной) модели атмосферы при $\lambda = 0,59$ мкм, $r_0 = 6367,5$ км, дают следующие значения параметров: $B_2 \approx -1,51$; $B_4 \approx -0,55 \cdot 10^4$; $B_6 \approx -0,22 \cdot 10^8$; $(n_0 - 1) \approx 2,77 \cdot 10^{-4}$. Учитывая, что при $z = 90^\circ$ $\alpha \approx 2000''$, т.е. $\alpha \approx 10^{-2}$ [1], и подставляя численные значения α , $(n_0 - 1)$, B_2 , B_4 , B_6 в (15), получаем сходящийся числовой ряд

$$0 \approx 2,77 \cdot 10^{-4} - 1,51 \cdot 10^{-4} - 0,55 \cdot 10^{-4} - 0,22 \cdot 10^{-4} - \dots \quad (16)$$

Таким образом, непосредственно из (16) видно, что даже в наиболее невыгодной по условиям сходимости ситуации (когда $z = 90^\circ$) ряд в правой части уравнения (15), определяющего угол рефракции α сходится.

Сходимость полученных разложений иллюстрируется рисунком, на котором показаны зависимости угла рефракции α от зенитного расстояния z . Здесь кривая 1 дает точные значения α , полученные путем численного интегрирования; кривая 2 соответствует результатам вычислений по формулам (7) – (10) с учетом членов, пропорциональных D , D^2 , D^4 ; кривая 3 – с учетом членов, пропорциональных D , D^2 , D^4 , D^6 ; кривая 4 рассчитана по формуле (11). Все расчеты выполнены для приведенных выше численных значений параметров, использовавшихся при оценке коэффициентов в уравнении (15). Видно, что с увеличением числа учитываемых в (7), (8) членов разложения полученная в настоящей статье зависимость (9) для угла рефракции стремится к точному решению.



Зависимости угла астрономической рефракции α от зенитного расстояния z . Кривая 1 – точный расчет; 2 – расчет по формулам (7) – (10) с учетом членов, пропорциональных D , D^2 , D^4 ; 3 – аналогичный расчет с учетом членов, пропорциональных D , D^2 , D^4 , D^6 ; 4 – расчет по формуле (11)

Из рисунка видно также, что в области $z < 87 \dots 89^\circ$ вопросы сходимости становятся менее острыми. Проведенные расчеты позволили уточнить предварительные данные [12] и сделать вывод о том, что для определения угла рефракции с погрешностью не более $0,5''$ в диапазоне зенитных углов $0^\circ \leq z \leq 80^\circ$ (на 10° превышающем диапазон, в котором справедлива теорема Ориани–Лапласа), достаточно учесть в (7) – (10) лишь члены со степенями D не выше, чем D^4 .

Расчеты также показали, что в области $z < 70^\circ$ точность формул (7) – (10) даже при учете лишь членов, пропорциональных D , D^2 , D^4 , почти на два порядка превышает точность формулы Ориани–Лапласа.

4. Заключение

Таким образом, в настоящей статье обоснован новый подход к теоретическому решению задачи определения астрономической рефракции в трехмерно-неоднородной земной атмосфере-

ре. Показано, что в рамках данного подхода можно обеспечить наперед заданную точность вычисления угла вертикальной рефракции во всем диапазоне видимых зенитных углов $0^\circ \leq z \leq 90^\circ$ для модели сферически-слоистой атмосферы с использованием лишь метеоданных, определяемых у точки наблюдения.

Дальнейшее развитие обсуждаемого подхода может быть связано с более тщательным исследованием возможностей сферически-слоистой модели (в частности, на базе численного эксперимента с применением реальных профилей радиозондирования атмосферы) и с рассмотрением общего случая астрономической рефракции в близгоризонтной зоне для трехмерно-неоднородной земной атмосферы. В качестве исходного уравнения, позволяющего в этом общем случае исследовать горизонтальную и боковую аномалии рефракции, удобно использовать уравнение (4).

Автор благодарит Е.В. Ремаева за помощь в расчетах на ЭВМ. Работа выполнена частично при поддержке Международного научного фонда, которому автор выражает свою признательность.

1. Алексеев А.В., Кабанов М.В., Куштин И.Ф., Нелюбин Н.Ф. Оптическая рефракция в земной атмосфере (наклонные трассы). Новосибирск: Наука, 1983. 230 с.
2. Колчинский И.Г. Рефракция света в земной атмосфере. Киев: Наукова думка, 1967. 44 с.
3. Нефедьева А.И. // Известия Астрономической обсерватории Энгельгардта. 1986. N 36. С. 3–168.
4. Юношев Л.С. // Геодезия и картография. 1991. N 8. С. 5–9.
5. Шабельников А.В. // Письма в Астрономический журнал. 1983. Т. 9. N 11. С. 695–698.
6. Яценко А.Ю. Теория рефракции. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1990. 130 с.
7. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
8. Березин И.С., Жидков М.П. Методы вычислений. Ч. I. М.: Наука, 1966. 632 с.
9. Прокопов А.В. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 2. С. 107–110.
10. Прокопов А.В. // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. N 10. С. 1025–1029.
11. Teleki G., Sugawa S. // Publ. de l'Observ. astron. de Belgrade. 1987. N 35. P. 1–16.
12. Прокопов А.В. // Proc. of Int. Conf. «Physics in Ukraine». Kiev, 22–27 June, 1993. Contributed Papers. Radiophysics and Electronics. Kiev. 1993. P. 219–222.
13. Казаков Л.Я., Ломакин А.Н. Неоднородности коэффициента преломления воздуха в тропосфере. М.: Наука, 1976. 165 с.

Научно-производственное объединение «Метрология»,
г. Харьков

Поступила в редакцию
20 сентября 1994 г.

A. V. Prokhorov. **Some Aspects of the Theory of Astronomical Refraction in the Earth's Atmosphere.**

The new technique for theoretical treatment of astronomical refraction in three-dimensional inhomogeneous atmosphere is developed. This technique is based on integral representation of ray equation, which reduces the refraction problem to the solution of algebraic equations system for refraction angles and length of any part of ray trajectory bent by the Earth atmosphere.

Using the model of the spherically-layered Earth atmosphere as an example it is demonstrated that the advanced technique yields a prescribed accuracy of determination of refraction in the range of apparent zenith angles $0^\circ < z < 90^\circ$.