

А.А. Попов

**О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ
В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА КРУПНЫХ КРИСТАЛЛАХ.
Ч. 3. РАССЕЯНИЕ НА ПЛАСТИНКЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ**

С помощью метода физической оптики получены асимптотические выражения для сечений и факторов эффективности ослабления и рассеяния в случае, когда один из линейных размеров основания прямоугольной пластинки устремляется в бесконечность. Установлено, что погрешность метода физической оптики для данной задачи рассеяния зависит от значений двух определенных интегралов. Каждый из них является асимптотическим выражением соответствующего двойного интеграла, полученного для пластинки с прямоугольным основанием. Показано, что оценка погрешности метода в случае прямоугольной пластинки существенно упрощается, если вместо двойных интегралов использовать их асимптотические выражения.

В статье [1] для прямоугольной пластинки приведена оценка погрешности метода физической оптики в виде неравенства, правая часть которого является линейной комбинацией двух двойных интегралов. Каждый из них зависит от двух дифракционных параметров, соответствующих двум линейным размерам прямоугольного основания пластинки. В [1] показано, что увеличение одного из дифракционных параметров приводит к уменьшению погрешности метода физической оптики. Но погрешность метода в этом случае ограничена некоторой горизонтальной асимптотой. Для определения ее положения приходится либо численно интегрировать быстроосциллирующие функции двух переменных, либо выполнить неочевидный предельный переход при условии, что один из двух дифракционных параметров устремляется в бесконечность.

Однако предварительно составленные таблицы для значений горизонтальных асимптот позволили бы значительно проще проводить оценку погрешности метода физической оптики при решении той или иной задачи рассеяния. В этой связи представляет интерес упростить рассмотренную ранее задачу рассеяния для прямоугольной пластинки в самой постановке. Для этого необходимо один из линейных размеров основания пластинки устремить к бесконечности и тем самым свести задачу рассеяния к двумерному случаю.

Пусть полупрозрачная пластинка с показателем преломления n и показателем поглощения $\chi = 0$ бесконечна по оси Oy , имеет ширину $2a$ по оси Ox и толщину d по оси Oz . Пусть плоская волна \mathbf{E}_i падает нормально на основание пластинки, т.е. $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}e^{ikz}$. Амплитуду электрической составляющей падающего поля \mathbf{E} зададим в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{x}'_0 E_1 + \mathbf{y}'_0 E_2 = \mathbf{x}_0 E_{p_1} + \mathbf{y}_0 E_{p_2}, \quad (1)$$

где

$$E_{p_1} = E_1 \cos \xi - E_2 \sin \xi; \quad E_{p_2} = E_1 \sin \xi + E_2 \cos \xi.$$

При таком задании амплитуды \mathbf{E} ее составляющие E_1 и E_2 развернуты относительно осей Ox и Oy на некоторый угол ξ .

Переход от тела конечных размеров к телу бесконечной протяженности влечет за собой качественное изменение функции Грина для задачи рассеяния. Действительно, функция Грина для рассеивателя конечных размеров в виде сферической волны при интегрировании в бесконечных пределах по одной из поперечных координат переходит в функцию Ханкеля [2]. В результате для пластинки бесконечной протяженности рассеянное поле имеет структуру цилиндрической волны. Вводя в рассмотрение цилиндрическую систему координат (ρ, φ, y) , ось которой совпадает с осью Oy , и используя асимптотическое представление для функции Хан-

келя первого рода нулевого порядка при больших аргументах [3], для электрической составляющей рассеянного поля запишем следующее выражение:

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{A} \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \exp[i(k\rho - \pi/4)], \quad (2)$$

где

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = (\varphi_0 E_{p_1} + \mathbf{y}_0 E_{p_2}) S(\varphi). \quad (3)$$

Орты прямоугольной системы координат $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$, в которой расположена пластинка, связаны с ортами цилиндрической системы координат $\rho_0, \varphi_0, \mathbf{y}_0$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \rho_0 \sin \varphi + \varphi_0 \cos \varphi; \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{y}_0; \\ \mathbf{z}_0 &= \rho_0 \cos \varphi - \varphi_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

При такой взаимосвязи координатных систем угол φ отсчитывается от оси Oz в координатной плоскости Oxz . Функция $S(\varphi)$ является интегральной характеристикой рассеяния в дальней зоне пучков, вышедших из пластинки в прямом и обратном направлениях. Она определяется выражением

$$S(\varphi) = \frac{k}{2\pi} \left[\frac{1 + \cos \varphi}{2} F_1(\varphi)(1 - T) + \frac{1 + \cos(\pi - \varphi)}{2} F_2(\varphi) R \right]. \quad (5)$$

Здесь комплексные величины T и R являются коэффициентами передачи и отражения Френеля для плоской волны, падающей нормально на полупрозрачный слой толщиной d . Они имеют такой же вид, как в ранее рассмотренных задачах рассеяния для прямоугольной [1] и круглой [4] пластинок. Функции $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ являются интегралами Фраунгофера от фазовых функций по отрезку $[-a, a]$. В результате этого интегрирования $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= 2a [\sin(p \sin \varphi)] / (p \sin \varphi); \\ F_2(\varphi) &= 2a [\sin(p \sin(\pi - \varphi))] / [p \sin(\pi - \varphi)], \end{aligned} \quad (6)$$

где $p = ka$ – дифракционный параметр; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны. Учитывая, что $F_1(\varphi) = F_2(\varphi)$, и вводя для них новое обозначение – $F(\varphi)$, соотношение для угловой функции $S(\varphi)$ запишем в виде

$$S(\varphi) = \frac{k}{2\pi} F(\varphi) \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} (1 - T) + \frac{1 - \cos \varphi}{2} R \right). \quad (7)$$

В [1] показано, что при нормальном падении плоской волны на основание пластинки характеристики рассеяния и ослабления не зависят от состояния поляризации волны. Поэтому выберем такую поляризацию, при которой максимально упростится решение поставленной задачи рассеяния. Далее сделаем обобщение полученных формул на случай произвольной поляризации. Пусть $E_{p_1} = 0, E_{p_2} = 1$, что соответствует линейной поляризации падающей волны, электрическая составляющая которой направлена вдоль оси Oy . Тогда для электрической составляющей полного поля \mathbf{E}_t имеем

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_s = \mathbf{y}_0(\psi_i - \psi_s), \quad (8)$$

где

$$\psi_i = \exp(ikz), \quad \psi_s = \sqrt{(2\pi/k\rho)} \exp[i(k\rho - \pi/4)] S(\varphi), \quad (9)$$

т.е. задача рассеяния сводится к скалярному случаю.

Следуя общим представлениям, на основе которых в [5] выводится формула для сечения ослабления, для данной характеристики в случае плоской волны имеем

$$\sigma_{\text{ext}} = (4\pi/k) \operatorname{Re}(S(0)). \quad (10)$$

При нормальном падении волны на основание пластинки образуется геометрическая тень с линейным размером в плоскости Oxz , равным $2a$. Учитывая также, что $S(0) = p(1 - T)/\pi$, для фактора эффективности ослабления получим

$$Q_{\text{ext}} = \sigma_{\text{ext}}/(2a) = 2(1 - \operatorname{Re}(T)). \quad (11)$$

В данной постановке задачи, т. е. при нормальном падении волны на основание пластинки бесконечной протяженности, формула для фактора эффективности ослабления имеет тот же вид, что и в случаях круглой [4] и прямоугольной [1] пластинок.

Сечение рассеяния в случае плоской волны при единичной амплитуде падающего поля определяется как полная интенсивность, рассеянная пластинкой в координатной плоскости Oxz , т.е.

$$\sigma_{\text{sca}} = \int_0^{2\pi} |\Psi_s|^2 \rho d\varphi = \frac{2\pi}{k} \int_0^{2\pi} |S(\varphi)|^2 d\varphi. \quad (12)$$

Учитывая соотношение (7) для $S(\varphi)$ и вводя в рассмотрение новую функцию $f(\varphi) = F(\varphi)/2a = \sin(p \sin \varphi)/p \sin \varphi$, формулу для сечения рассеяния преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{sca}} = & \frac{2\pi P^2}{k \pi^2} \left(|1 - T|^2 \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right)^2 d\varphi + |R|^2 \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) \left(\frac{1 - \cos \varphi}{2} \right)^2 d\varphi + 2\operatorname{Re}([1 - T]R^*) \times \right. \\ & \left. \times \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - \cos \varphi}{2} \right) d\varphi \right). \quad (13) \end{aligned}$$

Используя равенство

$$\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) \left(\frac{1 - \cos \varphi}{2} \right)^2 d\varphi$$

и переходя к фактору эффективности рассеяния $Q_{\text{sca}} = \sigma_{\text{sca}}/(2a)$, получим

$$Q_{\text{sca}} = (|1 - T|^2 + |R|^2)C(p) + 2\operatorname{Re}((1 - T)R^*)D(p), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} C(p) &= \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right)^2 f^2(\varphi) d\varphi; \\ D(p) &= \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - \cos \varphi}{2} \right) f^2(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение (14) для фактора эффективности рассеяния имеет такую же структуру, как и в случаях круглой и прямоугольной пластинок, но отличается видом функций C и D .

Формулы (11) и (14) для характеристик рассеяния получены при скалярном рассмотрении падающего и рассеянного полей. Покажем, что при векторном задании полей, т. е. когда требуется перейти к произвольной поляризации падающей волны, решение задачи рассеяния сводится к тем же формулам (11) и (14). Обобщим исходные формулы (10) и (12) для сечений ослабления и рассеяния на случай произвольных полей, т.е. представим эти характеристики в виде

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{4\pi}{k} \frac{\text{Re}(\mathbf{E}^* \mathbf{A}|_{\varphi=0})}{|\mathbf{E}|^2}, \quad (16)$$

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{1}{|\mathbf{E}|^2} \int_0^{2\pi} \left| \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho}} \exp[i(k\rho - \pi/4)] \mathbf{A} \right|^2 \rho d\varphi = \frac{1}{|\mathbf{E}|^2} \frac{2\pi}{k} \int_0^{2\pi} |\mathbf{A}|^2 d\varphi. \quad (17)$$

Однако в данной постановке задачи рассеяния

$$\mathbf{A}|_{\varphi=0} = (\mathbf{x}_0 E_{p_1} + \mathbf{y}_0 E_{p_2}) S(0) = \mathbf{E} S(0),$$

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}^* \mathbf{A} = (|E_{p_1}|^2 + |E_{p_2}|^2) |S(\varphi)|^2.$$

Кроме того, следует учесть, что

$$|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E}^* \mathbf{E} = |E_{p_1}|^2 + |E_{p_2}|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2.$$

В результате соотношения (16) и (17) преобразуются к ранее рассмотренным (10) и (12). Следовательно, окончательные формулы для характеристик рассеяния (11) и (14) справедливы при любой поляризации падающей волны при условии ее нормального падения на основание пластинки.

Величину δ , связанную с определенными выше характеристиками рассеяния Q_{ext} и Q_{sca} соотношением $\delta = (Q_{\text{ext}} - Q_{\text{sca}})/Q_{\text{ext}}$, примем за относительную погрешность метода физической оптики в случае плоской волны. Следуя далее подходу, который использован в [1, 4], для оценки величины δ получим неравенство

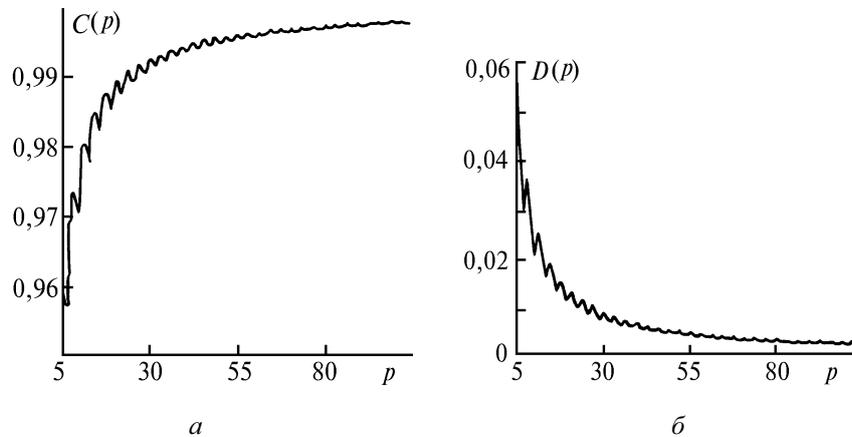
$$\delta(p) \leq 1 - C(p) + D(p). \quad (18)$$

Для интегралов C и D с помощью элементарных преобразований можно значительно сузить области интегрирования и записать их в следующем виде:

$$C(p) = \frac{p}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 \varphi) \left[\frac{\sin(p \sin \varphi)}{p \sin \varphi} \right]^2 d\varphi; \quad (19)$$

$$D(p) = \frac{p}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \left[\frac{\sin(p \sin \varphi)}{p \sin \varphi} \right]^2 d\varphi. \quad (20)$$

Таким образом, аналитическое выражение (18) определяет асимптотические значения для погрешности метода физической оптики в случае, когда один из линейных размеров прямоугольной пластинки стремится к бесконечности.



Зависимости значений интегралов $C(a)$ и $D(b)$ от дифракционного параметра p

На рисунке приведены значения интегралов C и D в зависимости от дифракционного параметра p . Кривые $C(p)$ и $D(p)$ ограничены горизонтальными асимптотами $C = 1$ и $D = 0$. Причем с ростом p интегралы C и D стремятся к своим асимптотам намного быстрее, чем соответствующие интегралы A и B в случаях круглой [4] и квадратной [1] пластинок. В результате для случая плоской волны погрешность в 1% достигается при дифракционном параметре $p = 50$, а при $p = 26$ и 17 погрешность метода не превышает 2 и 3% соответственно.

В [1] для прямоугольной пластинки приведена оценка относительной погрешности метода физической оптики в виде неравенства:

$$\Delta(p, q) \leq 1 - A(p, q) + B(p, q). \quad (21)$$

Функции A и B , зависящие от дифракционных параметров p и q , являются двойными интегралами от быстроосциллирующих функций. Причем с ростом p и q число осцилляций возрастает, что требует все больших затрат времени при численном интегрировании. Однако процедуру оценки погрешности метода в данном случае можно упростить. Для этого заменим двойные интегралы A и B комбинациями более простых функций C и D . Предварительный анализ значений A , B , C и D при различных дифракционных параметрах p и q позволяет связать их следующими соотношениями:

$$A(p, q) \approx C(p) C(q), \quad (22)$$

$$1 - B(p, q) \approx (1 - D(p)) (1 - D(q)). \quad (23)$$

Причем приближенные равенства выполняются тем точнее, чем больше p и q . В результате вместо оценки (21) можно использовать следующее неравенство:

$$\Delta_a \leq 1 - C(p) C(q) + D(p) + D(q) - D(p) D(q). \quad (24)$$

В табл. 1 приведены значения величин Δ и Δ_a , вычисленные при различных дифракционных параметрах p и q . В области больших p и q значения Δ и Δ_a практически совпадают. При оценке погрешности метода, как правило, достаточно вычислить значение Δ с точностью до 2–3 знака после запятой, что вполне оправдывает замену Δ на Δ_a . Нужно отметить, что интегралы C и D вычисляются значительно проще, чем A и B . Кроме того, C и D зависят только от одного дифракционного параметра, что позволяет их заранее протабулировать и свести их основные значения в небольшую по объему таблицу. Ряд значений интегралов C и D приведен в табл. 2.

Таблица 1				Таблица 2					
Значения погрешности метода физической оптики для пластинки с прямоугольным основанием, полученные при вычислении двойных (A и B) и определенных (C и D) интегралов				Значения интегралов C и D при различных дифракционных параметрах p					
p	q	Δ	Δ_a	p	C	D	p	C	D
5	5	0,1962	0,1968	5	0,9612	0,0623	150	0,9984	0,0017
10	5	0,1479	0,1488	10	0,9707	0,0208	200	0,9988	0,0013
20	5	0,1246	0,1250	15	0,9849	0,0181	250	0,9990	0,0010
40	5	0,1128	0,1130	20	0,9873	0,0124	300	0,9992	0,0009
80	5	0,1070	0,1070	25	0,9895	0,0094	350	0,9993	0,0007
10	10	0,0985	0,0989	30	0,9924	0,0091	400	0,9994	0,0006
20	10	0,0743	0,0745	35	0,9922	0,0065	450	0,9994	0,0005
40	10	0,0622	0,0623	40	0,9942	0,0067	500	0,9995	0,0005
80	10	0,0562	0,0561	45	0,9943	0,0054	600	0,9996	0,0004
20	20	0,0497	0,0498	50	0,9949	0,0049	700	0,9996	0,0004
40	20	0,0373	0,0374	60	0,9955	0,0039	800	0,9997	0,0003
80	20	0,0313	0,0313	70	0,9963	0,0034	900	0,9997	0,0003
40	40	0,0249	0,0250	80	0,9970	0,0032	1000	0,9997	0,0002
80	40	0,0186	0,0187	90	0,9974	0,0029	2000	0,9999	0,0001
				100	0,9975	0,0025	3000	0,9999	0,0001

Таким образом, совместное использование неравенства (24) и данных из табл. 2 позволяет наиболее просто оценивать погрешность метода физической оптики в случае, когда сечения образующихся пучков необходимо задавать двумя линейными размерами.

1. П о п о в А . А . // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 8. С. 1199–1205.
2. П р у д н и к о в А . П . , Б р ы ч к о в Ю . А . , М а р и ч е в О . И . Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
3. Н и к и ф о р о в А . Ф . , У в а р о в В . Б . Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. 319 с.
4. П о п о в А . А . , Ш е ф е р О . В . // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. N 8. С. 899–904.
5. В а н д е Х ю л с т Г . Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 536 с.

Марийский политехнический институт,
Йошкар-Ола

Поступила в редакцию
14 февраля 1995 г.

А . А . Р о р о в . Applicability Limits of the Method of Physical Optics in the Problem of Light Scattering by Large Crystals. P.3. Scattering by Infinitely Long Plate.

Asymptotical expressions are derived in the paper for cross-sections and factors of effective relaxation and scattering for the case that one of linear measures of rectangular plate is infinitive. The error of the physical optics method is stated to depend on magnitudes of two definite integrals for the given problem of scattering. Each of them is an asymptotic expression of the corresponding double integral obtained for rectangular plane. Estimation of the method error is shown to be significantly simpler provided instead of the double integrals their asymptotical expressions are taken.