«Оптика атмосферы и океана», **8**, N 11 (1995)

УДК (517.9+519.6): 621.3

**А.С. Полякевич, Б.Н. Пойзнер**

# ПРЕИМУЩЕСТВА ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАЗЕРНЫМИ СИСТЕМАМИ

Привлечение группового анализа дифференциальных уравнений к решению задач об управлении интенсивностью импульсного лазера в качестве дополнения теории оптимального управления позволило дать ответы на следующие вопросы: предпочтительнее ли управлять лазером с помощью изменения добротности или накачки и какой тип модуляции, активный или пассивный, использовать.

Создание многофункциональных лазерных систем с изменяющимися в широких пределах параметрами излучения является важным как в лабораторных установках, так и в индустриальных системах передачи и обработки информации. При проектировании таких систем неизбежны трудности, связанные с определением набора управляющих параметров из числа доступных для управления и определением функций управления этими параметрами.

В рамках теории оптимального управления преодолеть указанные трудности оказывается не всегда возможным, так как традиционная постановка задач оптимального управления предполагает наличие готового запаса вариантов управлений, причем выбор этих вариантов достаточно произволен. Чтобы определить наилучшее управление, требуется для каждого варианта решать оптимизационную задачу.

Недостатки такого подхода очевидны: неполнота исходного набора вариантов управлений и неоперативность процедуры перебора.

По-новому решить задачу оптимального управления и исключить указанные недостатки позволяет дополнение теории оптимального управления методом группового анализа дифференциальных уравнений. С его помощью можно получить классы управлений с заранее известными свойствами: каждому классу соответствуют определенные типы частных решений дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы. Этот метод также дает априорную информацию относительно универсальности того или иного класса управлений. Критерием универсальности служит количество типов частных решений, соответствующих данному варианту управления.

Методы группового анализа дифференциальных уравнений, а точнее решаемая ими задача групповой классификации дифференциальных уравнений, могут быть применены практически к любым математическим моделям лазерных систем, если последние представляют собой систему дифференциальных уравнений. Исключение составляют лишь системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, так как в этом случае интегрирование получающейся в процессе решения задачи групповой классификации некоторой системы дифференциальных уравнений, называемой системой определяющих уравнений, не легче интегрирования исходной системы.

Большинство математических моделей, описывающих лазерную динамику, являются нелинейными. По этой причине для их решения используют численные методы и ЭВМ. Полученные таким образом результаты обладают двумя недостатками: невысокой достоверностью и низкой степенью общности, полноты и наглядности. Компенсировать указанные недостатки обычно призваны аналитические методы.

На современном этапе развития прикладной математики из известных аналитических методов групповой анализ удовлетворяет самым высоким требованиям. Являясь объектом исследования математиков и широко ими применяемый, групповой анализ практически не используется физиками, а как показывают последние исследования [1], продуктивность этого метода достаточно высока, причем сфера его применения постоянно расширяется [2].

Групповой анализ дифференциальных уравнений позволяет:

– получить описание общего строения семейства всех решений;

– выделить определенные классы решений, отыскание которых в каком-либо смысле проще по сравнению с общим решением;

– осуществить производство решений из уже известных;

– целенаправленно выбирать аналитический вид параметров или функций, играющих роль произвольного элемента, такой, что с ним дифференциальное уравнение допускает группу преобразований с определенными свойствами или, вообще, наиболее широкую группу.

Последнее представляется наиболее важным для задач управления лазерными системами, так как их математические модели содержат управляющие параметры, которые как раз и есть не что иное, как произвольные элементы в задаче групповой классификации.

Коротко алгоритм решения задачи групповой классификации состоит в следующем. Сначала строится основная группа для исследуемой системы дифференциальных уравнений, которая состоит из множества локальных однопараметрических групп Ли локальных преобразований пространства зависимых и независимых переменных, входящих в данную систему дифференциальных уравнений, допускаемых этой системой. Затем делается предположение о произвольности выбранного управляющего параметра. В результате получается ядро основных групп для системы дифференциальных уравнений, равное пересечению всех основных групп, когда управляющий параметр пробегает множество всевозможных значений.

На этапе построения основной группы можно получить уравнения, которые содержат только управляющий параметр (или произвольный элемент). Они называются классифицирующими. С помощью некоторой дополнительной группы, называемой группой эквивалентности, решения классифицирующих уравнений разбиваются на классы, эквивалентные относительно действия группы эквивалентности. Итогом решения задачи групповой классификации является таблица, состоящая из ядра основных групп и его расширений за счет специализации произвольного элемента.

Имея такую таблицу, можно не только проанализировать возможности того или иного управления, но также можно рассчитывать на получение и остальных результатов группового анализа, о которых говорилось выше.

Ниже продемонстрируем применение этого подхода к задаче об управлении интенсивностью лазерного излучения для лазера, описываемого системой уравнений:

$$\begin{aligned}
&\partial_z S^+ + \partial_t S^- = S^+ N - a(t, S^+, S^-)\, S^+;\\
&\partial_z S^+ + \partial_t S^- = S^- N - a(t, S^+, S^-)\, S^-; \qquad (1)\\
&\partial_t N = b(t, S^+, S^-) - b(t, S^+, S^-)\, N - (S^+ + S^-)\, N,
\end{aligned}$$

где $S^+$ и $S^-$ – нормированные плотности световых потоков, распространяющихся вдоль оптической оси $z$ в противоположных направлениях; $N$ – нормированная инверсия населенности; управляющие параметры: $a(t, S^+, S^-)$ – параметр потерь, $b(t, S^+, S^-)$ – параметр накачки; $t$– время.

Результаты решения задачи групповой классификации представляются следующими классификационными схемами:

$$\begin{aligned}
&L_0^1 \subset L^2\,(f(S^+, S^-)), \qquad (2)\\
&L_0^1 \subset L^2\,(f(S^+, S^-)) \subset L^5\,(S^+ + S^- + S^+ \ln S^+ - S^- \ln S^-),
\end{aligned}$$

где $L_0$ – базис пространства касательных векторных полей ядра основных групп, допускаемых системой, индекс вверху допускает размерность этого пространства; $L$ – расширение пространства $L_0$ за счет специализации произвольного элемента, вид которого указан в круглых скобках.

Ниже приведены координаты векторов, образующих пространство касательных векторных полей, зная которые можно при решении системы уравнений Ли однозначно определить однопараметрические группы преобразований, допускаемые системой:

$$\begin{aligned}
&\zeta_1(1, 0, 0, 0, 0),\\
&\zeta_2(0, 1, 0, 0, 0),\\
&\zeta_3(0, 0, S^+, 0, 0), \qquad (3)\\
&\zeta_4(0, 0, 0, S^-, 0),\\
&\zeta_5(2\,z, z + t, 3\,S^+\,(\ln S^+ - 1), S^+ + S^-\,(\ln S^- - 1), N - a).
\end{aligned}$$

Первая из классификационных схем (2) соответствует решению задачи с произвольным элементом $a$, вторая – с произвольным элементом $b$.

Глядя на эти схемы, можно сделать вывод о том, что влияние параметра накачки $b$ на симметрию системы дифференциальных уравнений сильнее, чем параметра потерь $a$.

В наиболее общем случае, когда параметры $a$ или $b$ являются произвольной функцией $f$ от $t$, $S^+$, $S^-$, что соответствует смешанной модуляции добротности или накачки, система уравнений допускает только одно преобразование, которое соответствует преобразованию сдвига вдоль оптической оси. Инвариантным относительно этого преобразования решением является пространственно-однородное решение. Таким образом, в этом случае система уравнений обладает низкой степенью симметрии и спектр частных решений беден.

Второй тип функциональной зависимости параметров $a$ и $b$, который дает нам решение системы классифицирующих уравнений, опять произвольный в отношении $S^+$ и $S^-$, но конкретный в отношении $t$: модуляция должна быть только пассивной, то есть не зависеть от времени явно. В этом случае уравнения допускают двухпараметрическое семейство преобразований, состоящее не только в сдвиге по оси $z$, но и по времени. Набор частных решений системы здесь богаче: кроме пространственно-однородных к инвариантным решениям добавляются еще решения стационарные и типа бегущей волны. Таким образом, сужение множества управлений за счет отказа от активной модуляции увеличивает шансы предсказуемо управлять интенсивностью лазерного излучения.

Последний вид функциональной зависимости касается только произвольного элемента $b$. Этот совершенно определенный тип пассивной модуляции накачки позволяет значительно расширить спектр частных решений. К уже указанным добавляются автомодельные решения, соответствующие подгруппе растяжений с касательными векторами $\zeta_3$ и $\zeta_4$. Кроме того, еще не найдены инвариантные решения относительно подгруппы с касательным вектором $\zeta_5$ и относительно комбинации подгрупп с касательными векторами $\zeta_3$, $\zeta_4$ и $\zeta_5$. Все сказанное позволяет сделать вывод о том, что данное управление представляется наиболее перспективным в смысле полноты информации о возможных последствиях управления.

1. Дородницын В.А., Еленин Г.Г. // Компьютеры и нелинейные явления. М.: Наука, 1988. С. 123 – 191.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 416 с.

Томский государственный университет

Поступила в редакцию
17 мая 1995 г.

A.S. Polyakevich, B.N. Poizner. **Advantages of Group Analysis of Differential Equations in Solution of Some Problems of Laser System Optimum Control.**

Use of group analysis of differential equations in the problem of intensity control of the pulsed laser in addition to the optimum control theory allows one to answer the questions whether the intensity control with varying $Q$ – factor or laser pumping is preferable and what kind of modulation – active or passive – is more advantageous.