

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ.  
ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

551.510:551.508

**В.М. Логинов, Ю.А. Калуж**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ,  
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ МОНИТОРИНГЕ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Рассматриваются временные ряды (ВР), возникающие при изучении природных процессов. Излагается универсальный подход к математическому моделированию ВР, основанный на идее динамических переключений. При этом наряду с качественными рассуждениями дается строгая математическая постановка задачи, показаны способы построения математических моделей ВР. На конкретных примерах, связанных с глобальным потеплением климата планеты, иллюстрируются достоинства подхода, в том числе на основе предсказания дальнейшего поведения исследуемых ВР.

## 1. Введение

При мониторинге процессов, протекающих в живой и неживой природе, как правило, приходится иметь дело с временными рядами (ВР), описывающими поведение изучаемого объекта во времени. Временные ряды задают динамику поведения объекта и отражают многообразие всех тех сил и полей, которые на него воздействуют. Поскольку за каждым временным рядом стоят совокупности физических процессов, то для понимания механизмов их действия на изучаемый объект важным является создание адекватных математических моделей изучаемых ВР. Наибольшую ценность при этом имеют те подходы, которые позволяют с единых позиций подходить к временным рядам, отвечающим различным природным процессам, например ВР многолетних наблюдений температуры, давления, влажности атмосферного воздуха, временные колебания численности популяции того или иного вида, или временные вариации солнечного или иных видов излучения и т.п.

В данной статье представлен универсальный подход к математическому моделированию ВР. В основу подхода положено несколько простых фактов, которые являются общими для всех ВР, возникающих при обработке данных мониторинга природных процессов. В частности, характерной особенностью подобных временных рядов является то, что существуют промежутки времени, на которых изучаемая величина возрастает, и промежутки времени, на которых она убывает. Закон смены участков возрастания и убывания может быть случайным, детерминированным, а также представлять их смесь. Подход базируется на идее динамических и стохастических переключений режимов в точках смены знака производной (п. 2). Первые результаты в этом направлении были анонсированы в [1, 2]. Возможности подхода иллюстрируются (п. 3) на примерах временных рядов, описывающих глобальное потепление климата в текущем столетии, конкретно рассматриваются ВР «глобального изменения температуры» и концентрации углекислого газа в атмосфере (данные [3, 4]). Там же приведены простые четырехпараметрические математические модели, которые аппроксимируют реальные ВР с погрешностью, не превышающей 6%. Кратко обсуждаются предсказательные возможности полученных моделей ВР, а также возможности создания на их основе системы автоматизированного математического моделирования ВР.

## 2. Описание метода

### 2.1. Суть метода

Предлагаемый метод обработки и моделирования ВР удобно проиллюстрировать на основе схематического временного ряда, описывающего динамику поведения некоторого объекта или процесса (рис. 1). Как уже упоминалось выше, ВР характеризуется участками возрастания и убывания, а также их длительностью и чередованием по некоторому закону.

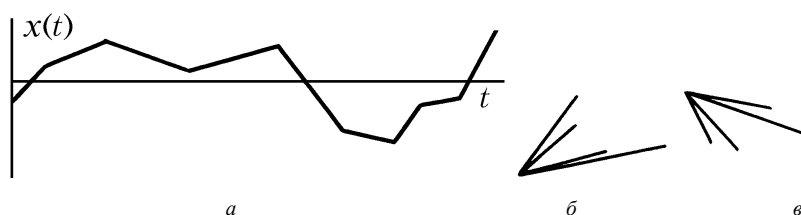


Рис. 1. Схематический временной ряд (а); «веера лучей», отображающие периоды роста и убывания ВР (б)

Зафиксируем точки переключения от режима возрастания к режиму убывания и рассмотрим отдельно режимы возрастания временного ряда. Представим, что отрезки, соответствующие периодам возрастания, исходят из одной точки (рис. 2, а). В результате получим «веер лучей», где каждый луч характеризуется своим углом наклона и задает на соответствующем промежутке времени рост функции  $x(t)$ .

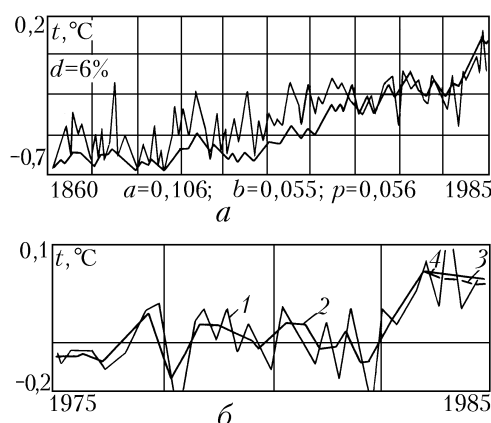


Рис. 2. Временной ряд «глобальные изменения температуры» и его модель (а); результаты прогнозирования ВР «глобальные изменения температуры». Кривой 1 изображены фактические данные, кривой 2 – модель, кривой 3 – результат прогнозирования и кривой 4 – результат усреднения фактических данных за промежутки прогнозирования

Как правило, для реальных ВР угол раскрытия веера невелик, так что всегда можно выбрать тем или иным способом некоторый эффективный (средний) угол наклона луча. Далее полагаем, что на участках возрастания ВР изменение функции  $x(t)$  происходит по «закону эффективного луча». Обозначим получившуюся кусочно-гладкую функцию через  $F^{+}(t)$ . Принимается, что эта функция описывает ВР  $x(t)$  на участках возрастания.

Повторяя рассуждения для промежутков времени, где ВР убывает (рис. 2, б), получим функцию  $F^{-}(t)$ , которая характеризует ВР  $x(t)$  с некоторой точностью на участках убывания. В результате ВР  $x(t)$  на временах наблюдения аппроксимируется некоторым эффективным временным рядом  $F^{+}(t) + F^{-}(t)$ . Причем по построению точность приближения зависит от того, как выбираются «эффективные лучи».

Сконструированный таким образом эффективный ВР позволит также, если известен закон чередования режимов возрастания и убывания, прогнозировать поведение экспериментального временного ряда на некоторый период времени (см. ниже). При построении математической модели реального ВР основной вопрос содержательной части математической формулировки состоит в выборе функций  $F^{+}(t)$  и  $F^{-}(t)$ .

## 2.2. Математическая постановка задачи

С формальной точки зрения большинство изучаемых временных рядов являются одномерными функциями времени. Если, однако, под переменной  $x(t)$  понимать переменную, характеризующую состояние природной среды в некоторой точке пространства, то  $x(t)$  становится многомерным вектором (будем называть его вектором состояния природной среды), компо-

нентами которого являются, например, поле скоростей атмосферного воздуха, концентрация той или иной примеси, температура, давление, влажность, интенсивность излучения и т.п. Для каждой из компонент  $x_i(t)$  вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$  существует множество времен  $T_i^{(+)}$ , на которых переменная  $x_i(t)$  возрастает. Пусть на временах  $t \in T_i^{(+)}$  динамика компоненты  $x_i(t)$  описывается уравнением

$$\dot{x}_i = F_i^{(+)}(\mathbf{x}(t), t). \quad (1)$$

На временах  $T_i^{(-)} = T \setminus T_i^{(+)}$  ВР  $x_i(t)$  описывается кусочно-убывающей функцией, являющейся решением уже некоторого другого уравнения

$$\dot{x}_i = F_i^{(-)}(\mathbf{x}(t), t), \quad (2)$$

где  $T$  задает полное время наблюдений за изучаемой характеристикой  $x_i(t)$ . Наклонная черта «\» означает операцию вычитания множеств, функции  $F_i^{(+)}$  и  $F_i^{(-)}$  представляют собой некоторые скалярные функции векторного аргумента  $\mathbf{x}(t)$  и времени  $t$ . Начальные условия для компоненты состояния  $x_i(t)$  задаем при  $t = 0$ ,  $x_i(t = 0) = x_{i0}$ . Как видно из уравнений (1) и (2), в схему построения включаются механизмы взаимодействия физических подсистем через влияние друг на друга компонент вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$ .

Приведенная выше система уравнений относится к случаю сосредоточенных динамических систем, когда состояние природной среды в некоторой фиксированной точке пространства является однопараметрической функцией временной переменной  $t$ . В более общей постановке вектор состояния природной среды зависит как от времени, так и от пространственных переменных. В этом случае уравнения (1) и (2) должны трактоваться как некоторые операторные уравнения для вектора состояния. При этом зависимость вектора состояния от переменных задачи становится многопараметрической. Распространение подхода на случай систем с распределенными параметрами будет изложено в отдельной работе.

Систему уравнений (1) и (2) для вектора состояния  $\mathbf{x}$  можно записать в более компактной форме. Для этого введем индикаторную функцию  $\alpha_i(t)$  такую, что  $\alpha_i(t) = 1$  (или некоторой постоянной), если  $t \in T_i^{(+)}$ , и  $\alpha_i(t) = -1$ , если  $t \in T_i^{(-)}$ . В результате система (1), (2) редуцируется к уравнению вида

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2} [F_i^{(+)}(x, t) + F_i^{(-)}(x, t)] + \frac{1}{2} \alpha_i [F_i^{(+)}(x, t) - F_i^{(-)}(x, t)] \quad (3)$$

с начальным условием  $x_i(t = 0) = x_{i0}$ . Как видно из уравнения (3), результирующее поведение системы, описываемое вектором состояния  $\mathbf{x}$ , представляет собой результат перемешивания двух динамик. Эти динамики для каждой из компонент задаются уравнениями (1) и (2). В зависимости от свойств множеств  $T_i^{(+)}$  и  $T_i^{(-)}$  это перемешивание носит детерминированный, стохастический или смешанный характер. Привлекая теперь качественную схему, изложенную в разделе 2.1, примем, что в качестве функций  $F_i^{(+)}(\mathbf{x}(t), t)$  и  $F_i^{(-)}(\mathbf{x}(t), t)$  будут выступать некоторые функции  $F_i^{(+)}$  и  $F_i^{(-)}$ , полученные определенным усреднением изучаемого ВР  $x_i(t)$  по участкам возрастания и убывания соответственно. При таком выборе функций  $F_i^{(+)}$  и  $F_i^{(-)}$  уравнение (3) представляет собой математическую модель реального временного ряда  $x_i(t)$ .

### 3. Моделирование конкретных временных рядов

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, сопоставление конкретному временному ряду математической модели, конструируемой через перемешивание стохастических и динамических состояний, зависит от того, какие функции  $F_i^{(+)}(\mathbf{x}, t)$  и  $F_i^{(-)}(\mathbf{x}, t)$  выбираются на интервале изучения ВР. В данной статье при выборе указанных функций используются следующие соображения. Многочисленные примеры процессов, протекающих в живой и неживой природе, указывают на  $S$ -подобное поведение во времени, когда на начальных временах изучаемая характеристика растет степенным или экспоненциальным образом, затем рост замедляется, кривая выходит на установившийся режим и уже слабо зависит от времени на некотором ин-

тервале. Физическими причинами, ограничивающими рост характеристик, являются, как правило, разнообразные нелинейности, присущие динамике самой системы и ее взаимодействию с другими подсистемами. Для реальных систем промежутки времени, на котором наблюдается установившийся режим поведения, часто конечен. Он может сменяться весьма резким уменьшением изучаемой характеристики также в связи с развитием нелинейных эффектов. В качестве примеров подобного поведения можем привести ряд кинетических процессов в твердых телах, в частности, процессы намагничивания и электропроводности в магнитных и проводящих материалах (см., например, [5, 6]), эффекты прохождения электромагнитного излучения в конденсированных средах [7, 8]. В живой природе динамика численности любой популяции, включая человеческую, ведет себя аналогичным образом [9, 10].

Для простоты моделирования и наглядности в качестве функции  $F^{(+)}(t)$  выберем решение, отвечающее классической логистической модели [9]:

$$\dot{x} = ax - bx^2, \quad (4)$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые положительные числа, т.е. в качестве функции  $F^{(+)}(x(t), t)$  выбирается правая часть логистического выражения (4). Решение уравнения (4) при малых  $t$  растет экспоненциально, а на больших временах выходит на стационарный уровень  $x_{st} = a/b$ :

$$x(t) = [a \exp(at)] / [c + b \exp(at)], \quad (5)$$

где  $c$  – постоянная, определяемая из начального уровня  $x(t_0 = 0) = x_0$ . Режим убывания моделируем экспоненциально спадающей функцией  $x(t) = C \exp(-pt)$ , являющейся решением динамического уравнения

$$\dot{x} = -px.$$

Правая часть этого уравнения задает, очевидно, функцию  $F_i^{(-)}(x, t) = -px$ .

Ниже покажем, что даже при таком выборе простейших динамических режимов их перемешивание и применение в качестве аппроксимации реальных ВР дает вполне удовлетворительную точность.

Рассмотрим участки роста временного ряда. Для каждого участка известны две точки  $(x_1, t_1)$  начала периода и  $(x_2, t_2)$  его конца. Очевидно, что через две точки  $(x_1, t_1)$  и  $(x_2, t_2)$  можно провести бесконечное множество кривых вида (5), поэтому для выбора коэффициентов  $a$ ,  $b$  и константы  $c$  воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК). МНК предполагает минимизацию среднеквадратичного отклонения

$$\sigma^2 = 1/n \sum_{i=1}^n (x_i - f(t_i))^2, \quad (6)$$

где  $f(t_i)$  – значение аппроксимирующей функции в точке  $t_i$ . Так как выражение (5) неудобно для взятия производных, проведем его преобразование с помощью подстановки  $X = 1/x$ ,  $\theta = \exp(-at)$ . В результате получим более подходящую для минимизации псевдолинейную зависимость

$$X = k\theta + m, \quad (7)$$

где  $k = c/a$ ;  $m = b/a$ . Используя (6) и (7), приходим к выражениям, позволяющим определить  $a$  и  $b$  для каждого из периодов роста временного ряда. Так как линеаризация исходной зависимости вносит некоторую ошибку, то для уточнения результата проводится перерасчет коэффициентов  $a$  и  $b$  в окрестности  $(a \pm 0,2a)$ ,  $(b \pm 0,2b)$ . После чего коэффициенты  $a$  и  $b$  усредняются как средневзвешенные по всем участкам роста временного ряда. Константа  $c$  определяется из условий сшивки решений в начальных точках:  $x(t = t_1) = x_1$ . Для каждого из участков убывания временного ряда коэффициент  $p$  и константа  $C$  однозначно определяются точками начала и конца периода убывания. После чего аналогичным образом производится усреднение

коэффициента  $p$  по всем участкам убывания ВР. Подставляя полученные результаты в (3), получаем математическую модель реального временного ряда

$$\dot{x} = (1/2) ((a - p)x - bx^2) + (1/2) \alpha(t)((a + p)x - bx^2), \quad (8)$$

где  $\alpha(t) = \pm 1$  в точках смены знака производной. Очевидно, что полученная модель явным образом зависит от трех параметров  $a$ ,  $b$ ,  $p$  и неявным от четвертого параметра  $\mu$  – частоты переключения режимов возрастания и убывания. Ниже приведем численные значения указанных параметров для рассмотренных временных рядов.

	$a$	$b$	$p$
Глобальные изменения температуры	0,106	0,055	0,056
Концентрация углекислого газа	0,090	0,003	0,04

На рис. 2, *а* представлены временной ряд «глобального изменения температуры» по данным [3] и его математическая модель. Относительное отклонение модели от реального ряда в смысле средних величин составляет 6%, относительные отклонения для каждой из рассмотренных 126 точек изменяются от 40 до 0,2%, что в среднем составляет 17%. Реальный ряд изображен тонкой линией, модель – утолщенной.

На рис. 2, *б* представлены результаты прогнозирования ряда с помощью модели (8). Прогноз поведения ВР обозначен пунктирной линией в правом углу рисунка, сплошная линия представляет собой усреднение фактических значений ряда за тот же промежуток времени.

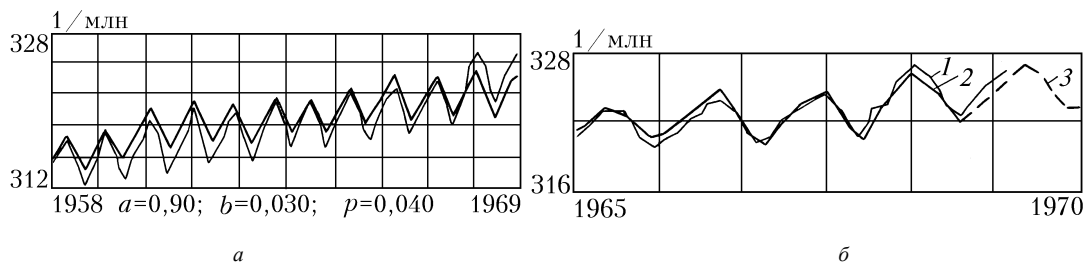


Рис. 3. Временной ряд «концентрация углекислого газа в атмосфере» (*а*); результаты прогнозирования ВР «концентрация углекислого газа в атмосфере». Кривой 1 изображены фактические данные, кривой 2 – модель, кривой 3 – результат прогнозирования

На рис. 3, *а*, *б* изображены временной ряд «концентрация углекислого газа в атмосфере» по данным [4], его математическая модель и результат прогнозирования. Нетрудно заметить хорошее согласование расчетного поведения ВР с фактическими данными. Причем, как видно из рис. 2 и 3, прогнозное поведение моделей ВР не выходит за пределы аппроксимации реальных рядов на промежутках времени около 1,5 года.

#### 4. Обсуждение

Предлагаемый в работе подход к математическому моделированию временных рядов позволяет избежать многих трудностей, проявляющихся при традиционных подходах к моделированию сложных временных рядов. Обычно при традиционном подходе принимается, что динамику ВР можно описывать системами нелинейных динамических уравнений, предполагая часто явную зависимость коэффициентов этих уравнений от времени. При моделировании сложных объектов, состояние которых описывается нелинейными уравнениями, дополнительная зависимость коэффициентов уравнений от времени приводит к сложным математическим задачам. Часто проблемы возникают уже на уровне доказательств теорем существования решений и их классификации. В развиваемом подходе для моделирования ВР используются очень простые математические модели.

В данной статье в качестве моделирующих функций выбраны решения логистического уравнения и линейного уравнения первого порядка. Понятно, что этим не ограничивается класс функций, с помощью которых можно моделировать временные ряды, опираясь на идею перемешивания динамических и стохастических состояний. В частности, такими функциями

могут быть полиномиальные функции. Отметим, что при моделировании временного ряда мы фиксируем точки смены знака производной, получая при этом некоторые усредненные характерные времена роста и убывания ВР. Эти времена, совместно с характерным временем смены знака производной ВР, являются фундаментальными параметрами при описании реальных ВР. С их помощью можно проводить экстраполяцию результатов моделирования на области времени, где отсутствуют наблюдения.

Применительно к рассматриваемым в работе ВР точность прогнозных оценок находится в пределах точности моделирования ( $< 6\%$ ) на временах не менее характерного времени смены знака производной. Простота моделирования и возможность экстраполяции позволяют с определенностью говорить о возможности создания автоматизированной системы математического моделирования природных процессов, описываемых временными рядами. Возможен и другой подход к моделированию ВР, основанный на стохастическом распределении точек переключения режимов и выборе наиболее близкой к реальному ВР реализации из множества возможных. Результаты прогноза и стохастического моделирования мы обсудим в последующих работах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93–01–12269)

1. Loginov V.M.. New mathematical approach to modeling of temporary behaviour of ecosystems //Modeling, Measurement & Control. 1995. V. 53. N 3. P. 57–63.
2. Логинов В.М., Калуж Ю.А. Новый подход к математическому моделированию динамики экосистем //Сибирский экологический журнал. 1995. N 3.
3. Глобальное потепление: Доклад Гринпис /Под ред. Дж. Леггетта. М.: Изд-во МГУ, 1993. 272 с.
4. Небел Б. Наука об окружающей среде: Как устроен мир: В 2-х т.т. Т. 1. М.: Мир, 1993. 424 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред: Теоретическая физика Т.VIII. М.: Наука, 1982. 624 с.
6. Чандрасекар С. Жидкие кристаллы /Под ред. А.А. Веденова, И.Г. Чистякова. М.: Мир, 1980. 344 с.
7. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцев С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 275 с.
8. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 248 с.
9. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. В 2-х т.т. Т. 1. М.: Мир, 1989. 667 с.
10. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества: В 2-х т.т. Т. 2. М.: Мир, 1989. 478 с.

Тувинский институт комплексного освоения природных ресурсов СО РАН,  
г. Кызыл

Поступила в редакцию  
6 июля 1995 г.

V.M. Loginov, Yu.A. Kalush. **The Mathematical Simulation of Temporary Series, Arising at Monitoring of Natural Processing.**

The temporary series (TS) corresponding to the natural processes are considered. The universal approach to mathematical simulation of TS, based on idea of dynamic switches is developed. Thus alongside with qualitative reasons the strict mathematical statement of the approach is given. The ways of constructing the mathematical models of TS are shown. An advantage of the approach is illustrated by the examples, connected with global changes in the Earth climate. The prediction of further behaviour of the TS studied by the method is discussed too.