

А.Б. Гаврилович, В.И. Бычек

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ РАССЕЯНИЯ СВЕТА АТМОСФЕРНОЙ ДЫМКИ ПО ОБОБЩЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Выполнено разложение элементов матрицы рассеяния света по обобщенным сферическим функциям с целью определения числа коэффициентов разложения, которое необходимо учитывать для обеспечения репрезентативности расчетных данных в задачах переноса светового излучения с учетом поляризации. Проведено исследование коэффициентов разложения для типичных моделей континентальной и городского аэрозолей, содержащих в определенных пропорциях основные полидисперсные компоненты: не растворимые в воде пылевые частицы, растворимые частицы и частицы углеродной антропогенной компоненты. Получены данные о сходимости рядов разложения диагональных и недиагональных элементов матрицы рассеяния.

В последние годы наблюдается повышенный интерес к поляризационным наблюдениям в атмосфере в связи с поиском новых, более эффективных по сравнению с энергетическими, способов дистанционного контроля состояния окружающей среды. Учет поляризационных эффектов, сопровождающих перенос излучения в атмосфере, существенно повышает информативность наблюдений [1]. Однако разработка соответствующих поляризационных методик гораздо более сложна и требует детального исследования особенностей светорассеяния методами векторной теории переноса. Векторная теория переноса использует разложение элементов матрицы рассеяния по обобщенным сферическим функциям [2,3]. Полный учет всех коэффициентов разложения при этом трудно осуществим, поэтому в практике инженерных расчетов обычно прибегают к усечению рядов разложения, ограничиваясь соответствующими приближениями. В настоящей статье исследуется разложение элементов матрицы рассеяния света атмосферным аэрозолем по обобщенным сферическим функциям и оценивается число коэффициентов, которое необходимо учитывать, чтобы обеспечить репрезентативность данных.

Микроструктурные и оптические параметры аэрозоля

Исходными для анализа являются элементы матрицы рассеяния, рассчитанные по теории Ми при вариации оптических постоянных и микроструктуры аэрозоля. Используются типичные модели аэрозолей нижней атмосферы Земли, рекомендованные Радиационной комиссией Международной ассоциации по метеорологии и атмосферной физике (IAMAP) [4]. Рассматриваются модели континентальной и городского аэрозолей в видимом диапазоне длин волн. Каждая из этих моделей в определенных пропорциях включает в себя основные аэрозольные компоненты: D – нерастворимые в воде частицы почвенного происхождения (пылевой компонент); W – растворимые в воде частицы (аммиак, сульфат кальция и органические соединения); S – частицы углеродного антропогенного компонента. Аэрозольные компоненты имеют свои показатели преломления ($n = 1,53(D)$; $1,53(W)$; $1,75(S)$) и поглощения ($\kappa = 8 \cdot 10^{-3}(D)$, $6 \cdot 10^{-3}(W)$, $4,4 \cdot 10^{-1}(S)$) на длине волны $\lambda = 0,55$ мкм. Распределение частиц по размерам аппроксимируется одномодовым логарифмически-нормальным распределением:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma r} \exp\left[-\frac{\ln^2(r/r_0)}{2\sigma^2}\right], \quad (1)$$

где r_0 и σ – параметры, принимающие для компонентов D , W и S соответственно следующие значения: 0,5 и 1,09527; 0,005 и 1,09527; 0,0118 и 0,69315 мкм. Модальный радиус r_m распределения связан с r_0 соотношением $r_m = r_0 \exp(-\sigma^2)$, средний радиус $\bar{r} = r_0 \exp(0,5 \sigma^2)$.

Оптические свойства совокупности полидисперсных частиц в основном определяются эффективным параметром дифракции $\rho_{32} = 2\pi r_{32}/\lambda$, где $r_{32} = r_0 \exp(2,5 \sigma^2)$ – эффективный радиус, равный отношению третьего и второго моментов функции распределения частиц по разме-

рам. Величина r_{32} в распределении пылевых частиц D на два порядка выше, чем для растворимых частиц W (10,033 и 0,1003 мкм). Наиболее узкое распределение и наименьшее значение $r_{32} = 0,0392$ мкм имеют углеродные частицы. Компоненты D , W и S , представленные в определенных пропорциях, образуют анализируемые в работе модели аэрозоля: континентального ($D - 70\%$, $W - 29\%$ и $S - 1\%$ по объему) и городского (17, 61, 22% соответственно).

Расчет коэффициентов разложения элементов матрицы рассеяния по обобщенным сферическим функциям (ОСФ)

Для разложения элементов матрицы рассеяния света $x_{ij}(\gamma)$ (γ – угол рассеяния) по ОСФ в общем случае необходимо перейти от SP-представления параметров Стокса к CP-представлению [5], когда элементы матрицы рассеяния выражаются линейными комбинациями x_{ij} . В случае сферических частиц $x_{11} = x_{22}$, $x_{33} = x_{44}$, благодаря чему анализ упрощается и можно ограничиться двумя обобщенными сферическими функциями P'_{00} и $P'_{20}(\mu)$, где $\mu = \cos \gamma$. Функции $P'_{00}(\mu)$ совпадают с полиномами Лежандра, а $P'_{20}(\mu)$ выражаются через $P'_{00}(\mu)$ [6]:

$$P'_{20}(\mu) = -\frac{1}{\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}} (1-\mu^2) \frac{d^2 P'_{00}(\mu)}{d\mu^2}. \quad (2)$$

Коэффициенты разложения элементов матрицы рассеяния вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} x_i^{11} &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 x_{11}(\mu) P'_{00}(\mu) d\mu, & x_i^{12} &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 x_{12}(\mu) P'_{20}(\mu) d\mu, \\ x_i^{34} &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 x_{34}(\mu) P'_{20}(\mu) d\mu, & x_i^{44} &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 x_{44}(\mu) P'_{00}(\mu) d\mu, \end{aligned} \quad (3)$$

где функции $P'_{mn}(\mu)$ удовлетворяют условию

$$\int_{-1}^1 |P'_{mn}(\mu)|^2 d\mu = \frac{2}{2l+1}. \quad (4)$$

Известно, что вычисление интегралов (3) сопряжено с практически неконтролируемыми погрешностями, обусловленными сильно осциллирующим поведением функций $P'_{mn}(\mu)$ при больших l . Для разрешения этой проблемы нами разработана специальная процедура вычисления интегралов (3), реализованная в программе для ПЭВМ IBM PC/AT. Она заключается в том, что при численном интегрировании (3) на каждом из участков разбиения отрезка $[-1, 1]$ для достаточно гладких функций $x_{ij}(\mu)$ применяется линейная интерполяция, в то время как интегралы от сильно осциллирующих функций $P'_{mn}(\mu)$ находятся аналитически с использованием рекуррентных соотношений.

Интегрируя (3) по частям, выражения для коэффициентов разложения x_i^{11} и x_i^{44} приводятся к виду

$$x_i^{ii} = \frac{1}{2} x_{ii}(\mu) [P'_{00}{}^{+1}(\mu) - P'_{00}{}^{-1}(\mu)] \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x'_{ii}(\mu) [P'_{00}{}^{+1}(\mu) - P'_{00}{}^{-1}(\mu)] d\mu. \quad (5)$$

Разбивая интервал $[-1, 1]$ на N малых участков $\Delta\mu = \mu_{k+1} - \mu_k$ и используя для $x_{ij}(\gamma)$ линейную интерполяцию, интеграл в правой части (5) приближенно заменяется суммой. Для диагональных элементов окончательно получаем:

$$\begin{aligned} x_i^{ii} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{ii}(\mu_{k+1}) - x_{ii}(\mu_k)}{\mu_{k+1} - \mu_k} \left\{ \frac{1}{2l+3} [P'_{00}{}^{+2}(\mu_{k+1}) - P'_{00}{}^{+2}(\mu_k)] - \frac{4l+2}{(2l-1)(2l+3)} [P'_{00}(\mu_{k+1}) - P'_{00}(\mu_k)] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2l-1} [P'_{00}{}^{-2}(\mu_{k+1}) - P'_{00}{}^{-2}(\mu_k)] \right\}, i = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для недиагональных элементов $x_{12} = x_{21}$ и $x_{34} = x_{43}$ при учете (2) аналогичным образом находим:

$$x_{ij}^{ij} = \frac{2l+1}{2\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{ij}(\mu_k) + x_{ij}(\mu_{k+1})}{2} \frac{l(l-1)}{l+1} [\mu_{k+1} P_{00}^l(\mu_{k+1}) - \mu_k P_{00}^l(\mu_k)] - \left(l + \frac{2}{l+1}\right) [P_{00}^{l-1}(\mu_{k+1}) - P_{00}^{l-1}(\mu_k)]. \quad (7)$$

При выводе формулы (7) нами использованы известные рекуррентные соотношения [6]:

$$(1 - \mu^2) \frac{d P_{00}^l(\mu)}{d\mu} = -(l+1) [P_{00}^{l+1}(\mu) - P_{00}^{l-1}(\mu)],$$

$$P_{00}^l(\mu) = \frac{1}{2l+1} \left[\frac{d P_{00}^{l+1}(\mu)}{d\mu} - \frac{d P_{00}^{l-1}(\mu)}{d\mu} \right], \quad (8)$$

$$\mu P_{00}^l(\mu) = \frac{1}{2l+1} [(l+1)P_{00}^{l+1}(\mu) + l P_{00}^{l-1}(\mu)].$$

Линейная интерполяция дает хорошее приближение для сравнительно невысокой асимметрии рассеяния. В случае сильно вытянутых угловых зависимостей необходимая точность достигается по методу Ньютона–Котеса путем использования интерполяционных многочленов или привлечения в области малых углов рассеяния операции гладкого восполнения функций $x_{ij}(\mu)$ [7]. Оценка погрешности вычисления коэффициентов разложения, полученная в результате тестовых расчетов для индикатрис Хеньи–Гринштейна, не превышает 1% для $l < 40$ и доходит до 10% при $l > 140$.

Результаты расчетов и выводы

На рис. 1 приведены угловые зависимости элементов матрицы рассеяния $x_{ij}(\mu)$, рассчитанные по теории Ми для полидисперсной совокупности сферических частиц, соответствующей моделям континентального и городского аэрозолей. Сравнение сплошных и штриховых кривых показывает, что зависимости имеют подобный ход и различия носят в основном количественный характер.

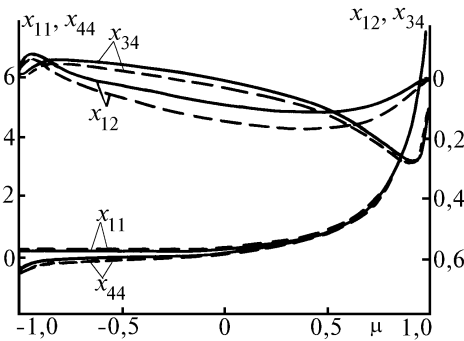


Рис. 1. Элементы матрицы рассеяния для континентального (сплошные) и городского аэрозоля (штриховые кривые)

Лишь в области определенных диапазонов μ различия существенны. Так, в области $\mu = 1$ (на рисунке не отражено) значения x_{11} для континентального аэрозоля более чем в 5 раз превышают соответствующие величины для городской модели. Особенности указанных моделей аэрозоля гораздо более выразительно проявляются при представлении их коэффициентами разложения x_{ij}^{ij} по обобщенным сферическим функциям.

На рис. 2, а эти различия проиллюстрированы для $x_{11}(\mu)$ и $x_{44}(\mu)$. Сплошная и штриховая кривые соответствуют дискретным спектрам, построенным при целых значениях l для конти-

нентального и городского аэрозолей. Зависимости для каждой из моделей аэрозоля имеют два максимума (при $l = 2$ и $l = 140$); отношение максимумов при переходе от одной модели к другой изменяется от значений, существенно меньших единицы, до значений, больших единицы. Расчеты показывают (рис. 2, а), что для каждой из компонент D , W и S в отдельности спектры x_l^{ij} характеризуются одномодальными распределениями с максимумами при $l = 1$ (для компоненты S), 2 (W), 130–140 (D). Очевидно, что двухмодальный характер спектра для моделей континентального и городского аэрозолей объясняется определяющей ролью компонент W и S в области малых значений l и компоненты D для больших l .

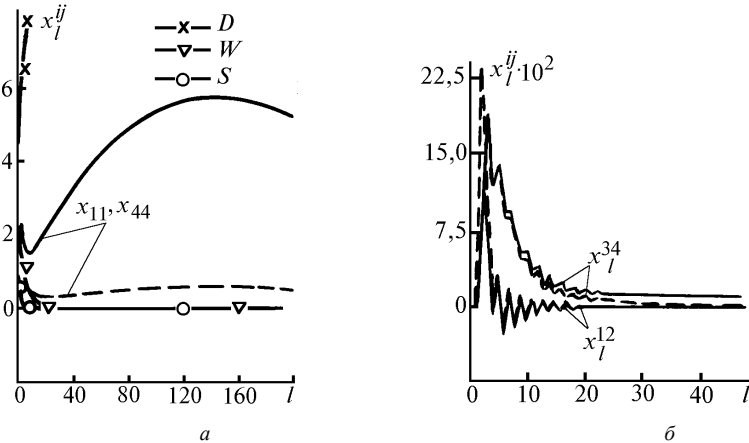


Рис. 2. Коэффициенты разложения элементов матрицы рассеяния по обобщенным сферическим функциям

Для элементов $x_{12}(\mu)$ (рис. 2, б) наиболее существенные различия аэрозольных моделей имеют место в области значений l порядка нескольких единиц; для $x_{34}(\mu)$, наоборот, различия в большей мере проявляются в области бóльших значений l , чем и определяется разная скорость сходимости соответствующих им рядов. Результаты расчетов показывают, что наблюдаемые осцилляции x_l^{12} и x_l^{34} постепенно ослабевают, а затем и совсем исчезают по мере уменьшения показателя преломления n и увеличения показателя поглощения k .

Оценка степени приближения элементов $x_{ij}(\mu)$ матрицы рассеяния усеченными рядами проводилась по двум критериям: на основании уравнения замкнутости и по среднеквадратичному отклонению от исходных восстановленных элементов матрицы рассеяния

$$x_{ij}(\mu) = \sum_{l=\sup(m,n)}^L x_l^{ij} P_{mn}^l(\mu) \quad (9)$$

при выбранных значениях L . Первый критерий основывается на использовании равенства Парсеваля–Стеклова (уравнения замкнутости):

$$\sum_{l=\sup(m,n)}^{\infty} \frac{2}{2l+1} (x_l^{ij})^2 = \|k_{ij}(\mu)\|^2, \quad (10)$$

где $\|k_{ij}(\mu)\|$ – норма элемента матрицы рассеяния. Степень приближения характеризуется величиной

$$\Sigma(L) = \frac{1}{\|k_{ij}(\mu)\|^2} \sum_{l=\sup(m,n)}^{\infty} \frac{2}{2l+1} (x_l^{ij})^2. \quad (11)$$

Очевидно, что в случае точного представления $x_{ij}(\mu)$ рядом (9)

$$\Sigma(L = \infty) = 1.$$

Скорость сходимости рядов (9) для различных элементов матрицы рассеяния иллюстрируется рис. 3. Для континентального аэрозоля отклонение $\Sigma(L)$ от единицы меньше 1% на-

блюдается при $L > 200$. Для городского аэрозоля значение L несколько меньше (около 160), однако скорость сходимости, начиная с $L \sim 5$, ниже, чем в случае модели континентального аэрозоля.

Элементы $x_{34}(\mu)$ имеют достаточно хорошую сходимость уже в области L порядка 60, однако скорость сходимости в области $L = 15-60$ очень невелика. Для $x_{12}(\mu)$ вполне удовлетворительная сходимость для обеих моделей обеспечивается уже при $L = 10$.

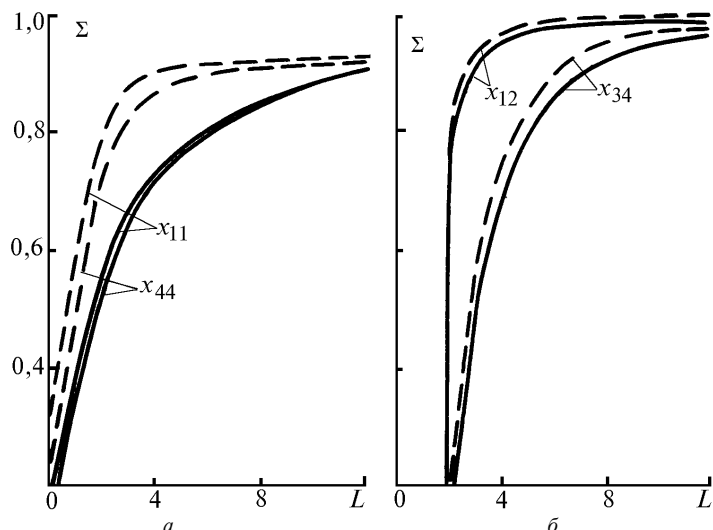


Рис. 3. Иллюстрация сходимости рядов в разложении по ОСФ различных элементов матрицы рассеяния

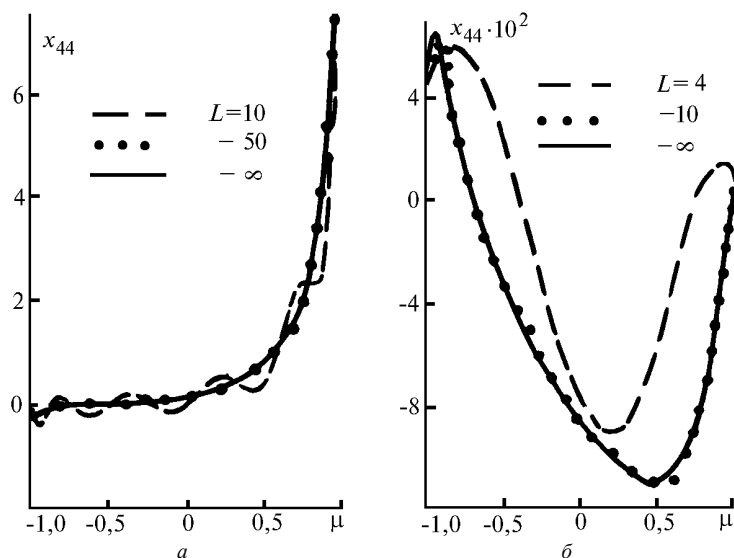


Рис. 4. Исходные и восстановленные элементы $x_{44}(\mu)$ и $x_{12}(\mu)$ матрицы рассеяния для модели континентального аэрозоля

Результаты, отраженные на рис. 3, позволяют найти число коэффициентов разложения, которое необходимо учитывать для представления элементов матрицы рассеяния в виде (9) при заданном отклонении от точного разложения. Величина отклонения $1 - \Sigma(L)$ обычно определяется требованиями решаемой задачи.

Степень приближения углового хода элементов матрицы рассеяния $x_{ij}(\mu)$ усеченными рядами (9) разложения по обобщенным сферическим функциям отражена на рис. 4. Представленные здесь данные свидетельствуют о том, что, удерживая в разложении по ОСФ, например, 50 слагаемых, можно добиться приемлемой точности восстановления углового хода для элемента $x_{44}(\mu)$ матрицы рассеяния (рис. 4, а), в то время как десяти слагаемых вполне достаточно для правильного отображения зависимости $x_{12}(\mu)$ (рис. 4, б).

Полученные в работе результаты и соответствующие выводы необходимо учитывать при решении задач теории переноса оптического излучения в атмосфере с учетом поляризации.

1. Долгинов А.З., Гнедин Ю.Н., Силантьев Н.А. Распространение и поляризация излучения в космической среде. М.: Наука, 1979. 424 с.
2. Бугаенко О.И. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1976. Т. 12. N 6. С. 603–611.
3. Малкова В.С., Романова Л.М. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1970. Т. 6. N 7. С. 732–735.
4. Маров М.Я., Шари В.П., Ломакина Л.Д. Оптические характеристики модельных аэрозолей атмосферы Земли. М.: ИПМ АН СССР, 1989. 229 с.
5. Kusser I., Ribarić M. // Optica Acta. 1959. V. 6. N 1. P. 42–51.
6. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1953. 368 с.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.

Институт физики АН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
27 февраля 1996 г.

A. B. Gavrilovich, V. I. Bychek. Expansion of the Matrix Elements of the Atmospheric Haze Scattered Light in the Generalized Spherical Functions.

The expansion of the scattered light matrix elements in the spherical functions has been performed with the aim of determining the number of expansion coefficients which should be taken into account for the calculated data representativity in the problems of the light radiations transfer considering the polarization. The expansion coefficients were investigated for the typical models of continental and urban aerosol including the main polydisperse components in certain proportions: dust particles (insoluble in water), soluble particles, and soot particles. The data on the diagonal and nondiagonal elements convergence scattered light matrix are obtained.