

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

УДК 621.378.33

Ю.Э. Гейнц, А.А. Землянов

### ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ ПОНДЕРОМОТОРНОГО ДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЖИДКИЕ ЧАСТИЦЫ

Численно исследована задача о деформациях и колебаниях поверхности капель с широким диапазоном их размеров под действием пондеромоторных сил интенсивного светового поля. Показано, что для малых частиц инициирование деформации происходит перпендикулярно направлению излучения, а для больших – вдоль лазерного луча. Неоднородность оптического поля в больших каплях может приводить к сильным локальным возмущениям поверхности.

Известно, что на диэлектрик, помещенный в электромагнитное поле, действуют объемные и поверхностные пондеромоторные силы [1]. Данное явление может приводить к ряду нелинейных эффектов, возникающих при взаимодействии интенсивного лазерного излучения со слабопоглощающими частицами. Наиболее важным среди них является эффект вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна (ВРМБ), возникающий за счет возбуждения стрикцией акустических волн в объеме капли. В ряде работ теоретически и экспериментально [4, 7, 8] исследовалось лазерное возбуждение поверхностных (капиллярных) волн в каплях. Указанный поверхностный эффект способен инициировать разрушение аэрозолей [4,8], вызвать поверхностное комбинационное рассеяние света [5, 6]. Его учет становится необходимым при анализе пороговых условий возбуждения вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) и ВРМБ, связанных с резонансными свойствами прозрачных сфер [13, 14]. Исследование задачи о лазерном возбуждении возмущений поверхности капель представляет практический интерес для задач атмосферной оптики [12]. Однако в цитируемых выше теоретических работах ее решение было проведено для узкого диапазона размеров частиц – малых капель. Это не позволяет распространить выводы исследований на частицы произвольного размера.

Основной целью настоящей работы является решение задачи о возбуждении капиллярных волн на поверхности жидких частиц произвольных размеров при воздействии лазерным излучением с различной интенсивностью.

#### Основные соотношения

Общая постановка задачи о деформации прозрачной капли в световом поле включает в себя уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости [2], записанные с учетом пондеромоторных сил:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} - (1/\rho) (\nabla p - \mathbf{f}_E), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\nu = \eta/\rho$  – скорость, давление, плотность, динамическая вязкость, кинематическая вязкость соответственно. Объемная плотность пондеромоторных сил определяется следующим соотношением [1]:

$$\mathbf{f}_E = \frac{1}{8\pi} \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \nabla E^2, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость жидкости;  $E$  – электрическое поле в частице;  $T$  – температура.

Кинематическое граничное условие на свободной поверхности капли, связывающее деформации и скорость, выражается следующим образом [2]:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla F = 0. \quad (3)$$

Граничное условие для напряжений на поверхности – динамическое граничное условие – представляется в виде [2]:

$$\left\{ p - \frac{\rho}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \mathbf{E}^2 - p_1 - \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + f \right\} n_i = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) n_k. \quad (4)$$

Здесь  $F(\mathbf{r}_1, t) = 0$  – уравнение деформированной поверхности жидкости;  $\mathbf{r}_1$  – радиус-вектор точек возмущенной поверхности;  $p_1$  – внешнее (атмосферное) давление;  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости;  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности;  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности капли;  $x_i$  – координаты;

$$f = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} [(\varepsilon - 1)(\mathbf{E}\mathbf{n})^2 + E^2] \quad (4)$$

скачок нормальной компоненты напряжения за счет электромагнитного поля на поверхности жидкости [1]. В выражениях (1), (4) следует учитывать лишь низкочастотные по отношению к частоте возбуждающего светового поля составляющие.

Интегральная формулировка задачи о гидродинамических эффектах в непоглощающей жидкой частице в интенсивном световом поле основывается на законе сохранения энергии. Известно, что изменение кинетической энергии в поле массовых сил дается выражением [2]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = - \int_S \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - (\mathbf{v}\mathbf{s}) \right] d\mathbf{S} - \int_V \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV - \int_V \mathbf{f}\mathbf{v} dV. \quad (5)$$

Здесь  $\sigma$  – тензор-вектор вязких напряжений;  $V$  – объем,  $S$  – деформированная поверхность жидкости;  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ .

Дальнейшее исследование будет проводиться для условий малости деформаций поверхности слабовязкой несжимаемой жидкости. Условие малости деформаций означает, что  $|\boldsymbol{\xi}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| \ll 1$ , где через  $\mathbf{r}_0$  обозначен вектор точки на возмущенной поверхности капли;  $\boldsymbol{\xi}$  – вектор смещения поверхности. В приближении малой вязкости жидкости течение внутри капли можно рассматривать потенциальным ( $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ). Исключение составляет область пограничного слоя толщиной  $l_b = r_0(\text{Re})^{-1/2}$ ,  $r_0 = |\mathbf{r}_0|$  – радиус капли; где  $\text{Re}$  – число Рейнольдса [2]. Для потенциального течения массовая скорость жидкости имеет вид

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi,$$

а вектор смещения поверхности капли соответственно

$$\boldsymbol{\xi}(\theta, \varphi) = \int_0^t \nabla\Phi dt',$$

где  $\Phi$  – потенциал скорости, удовлетворяющий для несжимаемой жидкости уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0.$$

Для условий, когда  $l_b \ll r_0$ , все члены в (5) могут быть определены исходя из приближения течения идеальной жидкости. Это становится возможным, поскольку для течения жидкости со свободной поверхностью скорость и ее производные не испытывают значительных изменений в пограничном слое [2]. Таким образом, при вычислении соответствующих объемных интегралов в (5) отличим скоростей и их производных в области вихревого течения и в области течения идеальной жидкости при малых размерах этой области можно пренебречь.

Корректное использование приближения потенциального течения при вычислении поверхностного интеграла в (5) обеспечивается условием малости деформаций поверхности капли.

Для малых смещений сумму обратных радиусов кривизны поверхности капли в сферических координатах можно представить следующим образом [2, 10]:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{r_0} + \frac{1}{r_0^2} (L^2 - 2) \xi(\theta, \varphi),$$

где  $L = -ir \times \nabla = -i \left[ \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$  – оператор углового момента;  $-L^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ ;  $\xi = |\xi|$ ;  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты.

Таким образом, с учетом граничных условий (4) в рамках сделанных допущений из (5) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\rho \Phi \mathbf{v}}{2} d\mathbf{S} + \int_S \left( \frac{2\alpha}{r_0} + p_1 \right) \mathbf{v} d\mathbf{S} + \alpha \int_S \frac{(L^2 - 2)}{r_0^2} \xi \mathbf{v} d\mathbf{S} + \eta/2 \int_S \nabla v^2 d\mathbf{S} = \int_S f \mathbf{v} d\mathbf{S}. \quad (6)$$

Записывая далее потенциал скорости (как гармоническую функцию) в виде разложения по шаровым функциям  $\left(\frac{r}{r_0}\right)^l Y_{ln}(\theta, \varphi)$ :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{ln} \Phi_{ln} \left(\frac{r}{r_0}\right)^l Y_{ln}(\theta, \varphi),$$

где  $Y_{ln}(\theta, \varphi)$  – сферическая гармоника, из (6) дифференцированием по времени получаем систему уравнений для вынужденных колебаний поверхности капли:

$$\frac{d^2 \Phi_{ln}}{dt^2} + \frac{2}{t_l} \frac{d\Phi_{ln}}{dt} + \Omega_l^2 \Phi_{ln} = \frac{1}{\rho} \frac{df_{ln}}{dt}. \quad (7)$$

Здесь  $f_{ln} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(t, r_0) Y_{ln}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta$ ;  $t_l = \frac{r_0^2}{2\nu(2l+1)(l-1)}$  – характерное время затухания

колебаний за счет вязких сил;  $\Omega_l = \left[ \frac{l(l-1)(l+2)\alpha}{\rho r_0^3} \right]^{1/2}$  – собственная (рэлеевская) частота колебаний капли. Звездочка означает комплексное сопряжение. Уравнение (7) дополняется начальными условиями:  $\Phi_{ln}(0) = d\Phi_{ln}(0)/dt = 0$ .

Для коэффициентов разложения смещения поверхности в ряд по сферическим функциям  $\xi(t, \theta, \varphi) = \sum_{ln} \xi_{ln}(t) Y_{ln}(\theta, \varphi)$  из (7) следуют соответствующие уравнения:

$$\frac{d^2 \xi_{ln}}{dt^2} + \frac{2}{t_l} \frac{d\xi_{ln}}{dt} + \Omega_l^2 \xi_{ln} = \frac{l f_{ln}}{\rho r_0}, \quad (8)$$

отличающиеся по виду от (7) правыми частями. Начальные условия к (8) имеют вид  $\xi(0) = \frac{d\xi(0)}{dt} = 0$ .

Следует отметить, что аналогичные по виду уравнения (7) и (8) могут быть получены лишь из одного граничного условия (4) без привлечения интегрального уравнения (5), если также считать течение жидкости потенциальным. Давление в жидкости при этом связывается с потенциалом  $\Phi$  соотношением

$$p = \frac{\rho}{8\pi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \right)_T E^2 - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Однако в этих уравнениях коэффициент при первой производной ( $2/t_i$ ), характеризующий затухание в системе, оказывается определенным не точно. Поэтому в [7], где основой для вывода уравнения колебаний служило выражение (4), соответствующий коэффициент был введен феноменологически, исходя из закона диссипации механической энергии при малых колебаниях поверхности жидкого шара [3].

Несколько замечаний следует сделать относительно вида вынуждающей силы в уравнении (8). Это обусловлено тем, что в ряде работ, касающихся проблемы течения жидкости в каплях при наличии световых полей (например, в [6, 9, 10]), выражения для сил даны не точно, не в соответствии с [1]. Таким образом, границы применимости оценок и расчетов, проведенных в данных работах для тех случаев, где эффект пондеромоторных сил является существенным, либо не ясны [6, 10], либо действительны только для определенного диапазона размеров жидких частиц [9].

В настоящей работе уравнения малых колебаний (7) и (8) получены наиболее строго. Ограничением является случай, когда несправедливо приближение слабовязкой жидкости. Если оценить  $Re \sim \Omega_2 r_0^2/\nu$ , то условие малости пограничного слоя нарушается, например, для капель воды с радиусом  $r_0 \leq 0,03$  мкм. Для изучения колебаний таких частиц следует использовать другие методы исследования задач течения вязкой жидкости (см., например, [11]).

Для решения уравнения (8) необходимо знать вид функции  $f$ , исходя из решения  $M_i$  для светового поля внутри капли. Известно, что такое решение для сферы при падении на нее линейно поляризованной волны имеет вид, определяющий поле в виде ряда по сферическим гармоникам:

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{E_0}{2kr} \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^{l+1} [b_e(x_a) \mathbf{M}_{l,1}(\theta, \varphi) \psi_l(r) + \frac{1}{k} c_m(x_a) \nabla \mathbf{M}_{l,1}(\theta, \varphi) \psi_l(r)] + \text{к.с.}, \quad (9)$$

где  $b_e, c_m$  – амплитуды парциальных гармоник (коэффициенты  $M_i$  [15]);  $x_a$  – параметр дифракции частицы;  $k$  – волновое число внутри частицы;  $\mathbf{M}_{l,m}(\theta, \varphi) = -\frac{i}{[l(l+1)]^{1/2}} \mathbf{L} Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  – сферическая вектор-гармоника [15];  $E_0 = |\mathbf{E}_0|$ ;  $\mathbf{E}_0$  – падающее на частицу световое поле.

Для случая однородного электромагнитного поля внутри капли возможно провести аналитическое решение задачи. При этом

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0; \quad f = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} [(\varepsilon - 1) E^2 \sin^2 \theta + E^2],$$

а коэффициент разложения функции  $f$  по сферическим функциям равен

$$f_{ln} = -6 \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \frac{E_0^2 (\varepsilon - 1)^2}{8\pi (\varepsilon + 2)^2} \delta_{2l} \delta_{0n}. \quad (10)$$

Здесь  $\delta_{mk}$  – дельта-символ Кронекера ( $\delta_{mk} = 1$  при  $m = k$ ;  $\delta_{mk} = 0$  при  $m \neq k$ ).

### Результаты численных расчетов

Решение системы уравнений (8) проводилось численным путем в два этапа. Сначала с использованием квадратур Гаусса и представлением внутреннего поля в виде (9) вычислялись значения коэффициентов  $f_{ln}(t, \theta, \varphi)$ . Затем по разностной схеме Рунге–Кутты 4-го порядка решались дифференциальные уравнения (8). Временной профиль воздействующего лазерного импульса выбирался в виде  $I(t) = I_0 t/t_p \exp\{-t/t_p\}$ , где  $I_0, t_p$  – пиковая интенсивность и длительность импульса соответственно.

Вид функции, характеризующий пространственное распределение вынуждающей силы для капель воды с различным размером, представлен на рис. 1. Кроме того, при расчетах рассматривались только азимутально симметричные колебания поверхности капли (симметрия по углу  $\varphi$ ).

Из рис. 1 следует, что для параметра  $M_i$   $x_a < 1$  вынуждающая сила имеет максимумы на полюсах капли, а для  $x_a > 1$  они смещены в зоны экватора в район углов сферических координат  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$  соответственно.

Иллюстрирующая данный эффект временная зависимость относительного смещения поверхности водных капель  $\xi(t)/\xi_{\max}$  для двух направлений  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  представлена на рис. 2.

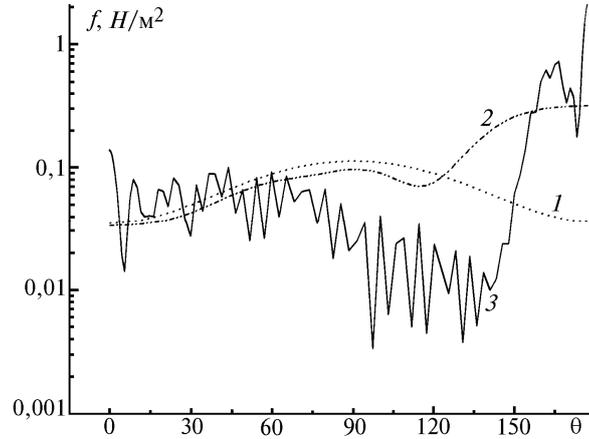


Рис. 1. Зависимость плотности нормальной составляющей, равнодействующей пондеромоторных сил на поверхности водных капель с радиусами  $r_0 = 0,03$  (1);  $0,3$  (2) и  $3$  мкм (3) от полярного угла  $\theta$ . Ось  $z$  соответствует направлению  $\theta = 0 \div 180^\circ$ . Интенсивность падающего излучения принималась равной  $I_0 = 10^4$  Вт/см<sup>2</sup>

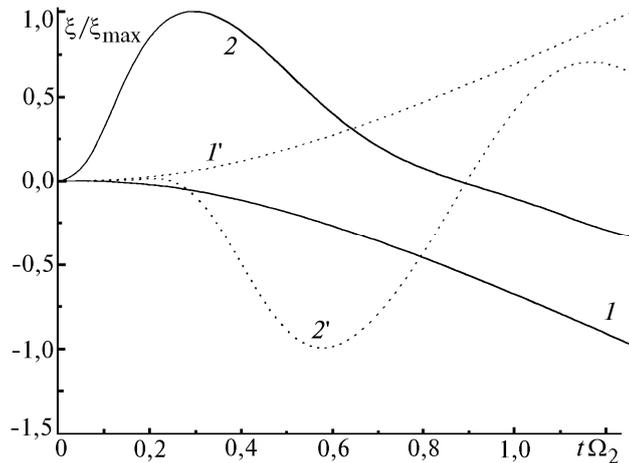


Рис. 2. Относительное смещение поверхности водных капель с  $r_0 = 0,03$  (1, 1') и  $3$  мкм (2, 2') в зависимости от времени. Рассмотрены два направления: вдоль ( $\theta = 0^\circ$ , сплошная кривая) и поперек ( $\theta = 90^\circ$ , пунктир) направления действия излучения с интенсивностью  $I_0 = 10^8$  Вт/см<sup>2</sup> и длительностью импульса  $t_p = 10^{-7}$  с

Из рисунка отчетливо видно, что начальная фаза колебаний малых и больших капель отличается на  $\pi/2$ .

Малые частицы деформируются в направлении, перпендикулярном к направлению воздействующего излучения, а большие – параллельно воздействию. При этом различны и амплитуды колебаний:  $\xi_{\max}/r_0 = 3 \cdot 10^{-5}$  для  $r_0 = 0,03$  мкм и  $\xi_{\max}/r_0 = 10^{-3}$  для  $r_0 = 3$  мкм при интенсивности воздействующего импульса излучения  $I_0 = 10^8$  Вт/см<sup>2</sup> длительностью  $t_p = 10^{-7}$  с  $\lambda = 0,53$  мкм.

Зависимость от времени амплитуд парциальных колебаний водной капли с  $r_0 = 3$  мкм и  $I_0 = 10^9$  Вт/см<sup>2</sup>,  $t_p = 10^{-7}$  с приведена на рис. 3. Как следует из (7), затухание высокочастотных гармоник с течением времени происходит достаточно быстро, и их влияние на общую картину деформаций капли проявляется только на начальном этапе колебаний. Для примера на рис. 4 представлена рассчитанная форма поверхности капли с  $r_0 = 25$  мкм (главное сечение) в различные моменты времени. Импульс излучения имел те же параметры, что и на предыдущем рисунке. Из рисунка следует, что локальные деформации поверхности водной частицы, первоначально вызываемые высокочастотными колебательными модами, в дальнейшем развиваются в эллипсоидаль-

ные колебания на основной частоте  $\Omega_2 = \left[ \frac{8\alpha}{\rho r_0^3} \right]^{1/2}$ . Кроме того, наблюдаются достаточно сильные ( $\xi_{\max}/r_0 \sim 0,3$ ) деформации поверхности капли, которые в ряде случаев способны привести к ее разрушению [8].

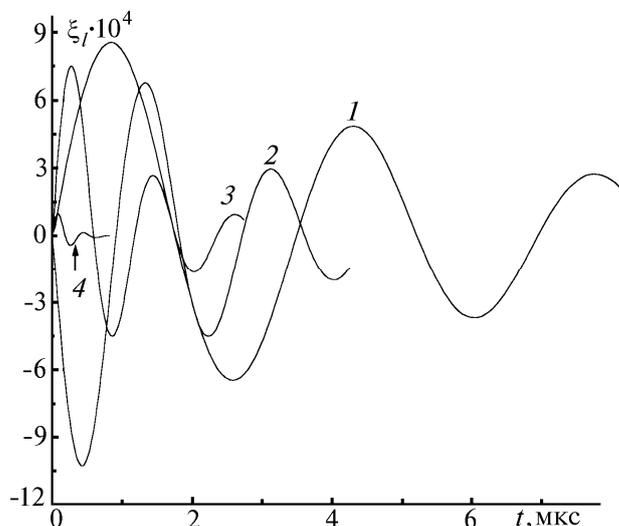


Рис. 3. Временная зависимость парциальных гармоник водной капли с  $r_0 = 3$  мкм с индексами  $l = 2$  (1); 3 (2); 4 (3); 9 (4)

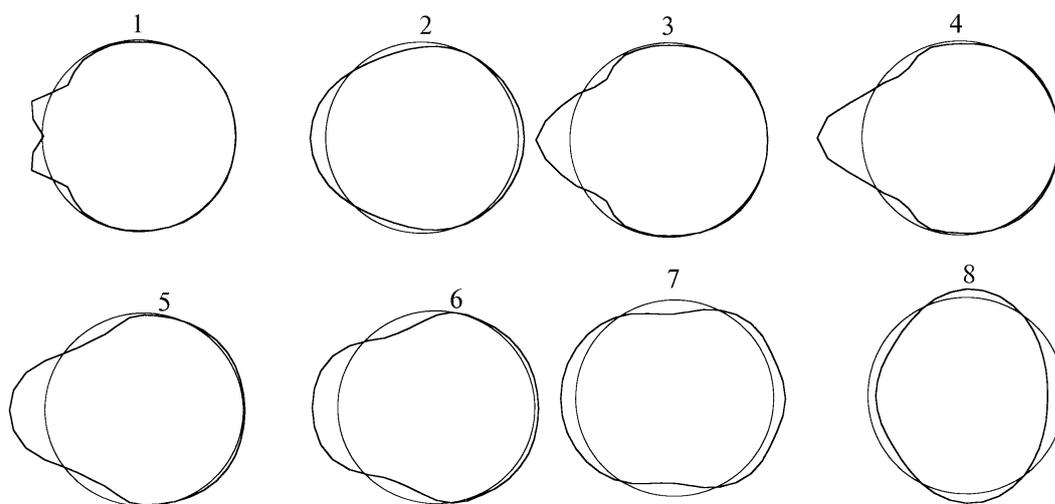


Рис. 4. Форма поверхности водной капли (главное сечение) с  $r_0 = 25$  мкм в различные моменты времени от начала воздействия излучения ( $I_0 = 10^9$  Вт/см<sup>2</sup>,  $t_p = 10^{-7}$  с, (направление падения излучения справа налево):  $t = 50$  нс (1); 80 нс (2); 0,2 мкс (3); 0,5 (4); 5 (5); 15 (6); 30 (7); 40 мкс (8)

## Заключение

Таким образом, в настоящей статье обоснованы уравнения малых деформаций поверхности слабвязкой прозрачной жидкой частицы под действием пондеромоторных сил светового поля. Из численных решений полученных уравнений установлена существенно различная картина деформаций малых и больших (с точки зрения теории Ми) частиц. Показано, что для малых капель инициирование деформаций происходит перпендикулярно направлению излучения, а для больших – вдоль лазерного луча. При определенных условиях теоретически установлена возможность достаточно сильных деформаций частицы, что может приводить к ее разрушению, а также к значительному поверхностному рассеянию падающей на частицу световой волны.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 266 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 735 с.
3. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1954. 649 с.
4. Землянов А. А. // Квантовая электроника, 1974. Т. 1. С. 2085–2088.
5. Быковский Ю. А., Манькин Э. А., Нахутин И. Е. и др. // Квантовая электроника. 1976. Т. 3. N 1. С. 157–162.
6. Быковский Ю. А., Манькин Э. А., Нахутин И. Е. и др. // ЖПС. 1975. Т. 23. В. 5. С. 866–871.
7. Zuev V. E., Zemlyanov A. A., Kopytin Yu. D., Kuzikovskii A. V. High-Power Laser Radiation in the Atmospheric Aerosol. D. Reidel Publ. Comp., Holland, 1984. 400 с.
8. Zhang J. Z., Chang R. K. // Opt. Lett. 1988. V. 13. N 10. P. 916–918.
9. Lai H. M., Leung P. T., Poon K. L., Young K. // JOSA. 1989. B. 6. N 12. P. 2430–2437.
10. Cantrell C. D. // JOSA. B8. 1991. N 10. P. 2158–2180.
11. Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. // ЖВММФ. 1968. Т. 8. N 6. С. 1281.
12. Зуев В. Е., Землянов А. А., Копытин Ю. Д. Нелинейная оптика атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 256 с.
13. Kwok A. S., Chang R. K. // Optics and Phot. News. 1993. P. 34.
14. Zhang J.-Z., Chang R. K. // JOSA. 1989. B6. N 2. P. 151–153.
15. Борен К. Ф., Хафмен Д. Р. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
27 марта 1996 г.

**Ju. E. Geints, A. A. Zemlyanov. Surface Effect of Pondermotive Action of Laser Radiation on Liquid Particles.**

The surface deformation and vibration of drops with wide range of sizes exposed to ponder motive forces of intense light field have been studied numerically. It is shown that in small particles the initiated deformation is directed perpendicularly to the radiation direction and in large particles – along the laser beam. The inhomogeneity of optical field in large drops may cause a strong local disturbance of their surface.