

В.П. Аксенов, В.А. Банах, О.В. Тихомирова

## ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ И ВИХРЕВЫЕ СВОЙСТВА ОПТИЧЕСКИХ СПЕКЛ-ПОЛЕЙ

На основе решения проблемы восстановления распределения фазы в оптическом пучке по измерениям распределения интенсивности (фазовая проблема в оптике) исследуются дислокации волнового фронта, порожденные вихревым течением световой энергии в окрестности точек, где интенсивность поля обращается в нуль. Обсуждаются причины неоднозначности решения фазовой проблемы. Вводятся понятия потенциальной и вихревой частей фазы. Получена аналитическая формула для восстановления потенциальной части фазы из измерений распределения интенсивности оптического спекл-поля и предложено использовать потенциальную фазу для коррекции сингулярных фазовых искажений в системах адаптивной оптики.

## Введение

Дислокации волнового фронта в оптических спекл-полях [1, 2] стали объектом исследования для специалистов, изучающих распространение волн в атмосфере, и индикатором ряда явлений и процессов в нелинейной оптике [3, 4] и лазерной физике. Существование дислокаций является главным препятствием для коррекции фазовых aberrаций в оптических адаптивных системах [5]. Кроме того, формируется направление исследований, связанное с использованием дислокаций для диагностики природных сред [6]. В настоящей статье возможность диагностики дислокаций рассматривается на основе решения задачи восстановления фазы волны по измерениям распределения ее интенсивности  $I(\mathbf{p}_0, z)$ ,  $\mathbf{p} = \{x, y\}$ . Наш подход заключается в реконструкции компонент вектора Умова – Пойнтинга с помощью дифференциальных уравнений эйконала и переноса, описывающих распространение волн в среде, в определении поперечной производной фазы и восстановлении фазы из значений ее частных производных (наклонов волнового фронта) на входном зрачке.

## Теоретические основы

Распространение монохроматической волны  $U(\mathbf{p}, z)$  в полупространстве  $z \geq 0$ , заполненном рефракционной средой с диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}, z)$ , описывается параболическим уравнением

$$2ik \frac{\partial U}{\partial z} + \Delta_{\perp} U + k^2 \tilde{\epsilon}(\mathbf{p}, z) U(\mathbf{p}, z) = 0. \quad (1)$$

Вводя фазу  $S(\mathbf{p}, z)$  и подставляя поле  $U(\mathbf{p}, z) = \{I(\mathbf{p}, z)\}^{1/2} \exp\{iS(\mathbf{p}, z)\}$  в (1), получаем систему

$$2kI^2 \frac{\partial S}{\partial z} + I^2 \{\nabla_{\perp} S\}^2 = k^2 I^2 \tilde{\epsilon}(\mathbf{p}, z) + \frac{1}{2} I \Delta_{\perp} I(\mathbf{p}, z) - \frac{1}{4} \{\nabla_{\perp} I(\mathbf{p}, z)\}^2, \quad (2)$$

$$\nabla_{\perp} \{I(\mathbf{p}, z) \nabla_{\perp} S\} = -k \frac{\partial I}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}, z) = (\epsilon - \langle \epsilon \rangle) / \langle \epsilon \rangle$ ;  $k = 2\pi \sqrt{\langle \epsilon \rangle} / \lambda$ ,  $\langle \epsilon \rangle$  – среднее значение диэлектрической проницаемости;  $\lambda$  – длина волны;  $\Delta_{\perp} = \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}$ ,  $\nabla_{\perp} = \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial y}$ .

Уравнение (3) является дифференциальной формой закона сохранения энергии для поперечной компоненты вектора Умова – Пойнтинга  $\mathcal{L} \{ \mathcal{L}_{\perp}, kI \}$ ,  $\mathcal{L}_{\perp} = I(\mathbf{p}, z) \nabla_{\perp} S(\mathbf{p}, z)$ . Векторное поле  $\mathcal{L}_{\perp}$  может быть представлено в виде суммы потенциальной  $\mathcal{L}_{\perp p}$  и вихревой  $\mathcal{L}_{\perp v}$  частей [7]:

$$I(\mathbf{p}, z) \nabla_{\perp} S = I(\mathbf{p}, z) \nabla_{\perp} S_p + I(\mathbf{p}, z) \nabla_{\perp} S_v, \quad (4)$$

где  $S_p(\mathbf{p}, z)$  – потенциальная и  $S_v(\mathbf{p}, z)$  вихревая части фазы. Из общих положений теории поля следует, что потенциальное векторное поле выражается через потенциал  $\varphi$  [7]

$$\mathcal{L}_{\perp p} = \text{grad } \varphi, \quad (5)$$

а дивергенция вихревого поля равна нулю, т.е.  $\nabla_{\perp} \cdot \mathcal{L}_{\perp v} = 0$ . Отсюда следует, что с помощью уравнения переноса (3) можно восстановить только потенциальную часть вектора Умова – Пойнтинга. Подставляя (5) в (3), получаем уравнение Пуассона относительно потенциала

$$\Delta_{\perp} \varphi = -k \frac{\partial I}{\partial z}(\mathbf{p}, z), \quad (6)$$

решение которого с граничным условием на периферии пучка  $\varphi(\infty, \infty, z) = 0$  является решением классической задачи Дирихле [7]. Не приводя выражения для  $\varphi$ , запишем сразу соотношение для потенциальной компоненты вектора Умова – Пойнтинга, используя (5):

$$\mathcal{L}_{\perp p}(\mathbf{p}, z) = -\frac{k}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta \frac{\partial}{\partial z} I(\xi, \eta, z) \frac{\mathbf{l}(x-\xi) + \mathbf{m}(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}. \quad (7)$$

Соотношение (7) дает возможность получить дифференциальные уравнения для потенциальных линий тока энергии в трехмерном пространстве:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \iint d\xi d\eta \frac{I(\xi, \eta, z)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right\}; \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \iint d\xi d\eta \frac{I(\xi, \eta, z)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right\}; \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \iint d\xi d\eta \frac{I(\xi, \eta, z)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right\}}{\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \iint d\xi d\eta \frac{I(\xi, \eta, z)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right\}}. \quad (10)$$

Зададимся теперь вопросом об однозначности восстановления фазы из соотношения

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{p}, z) = I(\mathbf{p}, z) \nabla S_p \quad (11)$$

для потенциальной компоненты вектора Умова – Пойнтинга.

Дифракция света сопровождается аномальным поведением волнового фронта в окрестности точек пространства, где интенсивность обращается в нуль [8]. Если при переходе через точку или линию с нулевой интенсивностью знак действительной и мнимой частей комплексного поля меняется на противоположный, то аномалия выражается в скачке фазы на  $\pi$ . Примером могут служить скачки фазы при пересечении темных колец радиусом  $r_d$  дифракционных минимумов в фокальной плоскости [8]. Фаза такого спекл-поля является обобщенной функцией, частные производные которой в точке  $\{x, y\}$  имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial S}{\partial x} \right\} + p \cos(\mathbf{n}x) \delta(\sqrt{x^2 + y^2} - r_d),$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial S}{\partial y} \right\} + \pi \cos(\mathbf{n}y) \delta(\sqrt{x^2 + y^2} - r_d),$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к кольцу радиуса  $r_d$ ;  $\left\{ \frac{\partial S}{\partial x} \right\}$  и  $\left\{ \frac{\partial S}{\partial y} \right\}$  – кусочно-непрерывные части производных. В окрестности кольца выполняется соотношение [8]

$$I(x, y) \sim (\sqrt{x^2 + y^2} - r_d)^2.$$

По теории обобщенных функций

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - r_d)^2 \delta(\sqrt{x^2 + y^2} - r_d) = 0,$$

следовательно, сингулярность производной фазы не будет оказывать влияние на значения компонент вектора Умова – Пойнтинга  $\mathcal{L}_p$ , и из соотношения (11) можно будет определить только кусочно-непрерывную часть производной, а значит, получить сглаженную версию фазы  $S_p(\mathbf{p}, z)$ . Для описания скачков необходимо привлекать дополнительную информацию, которую, например, содержит аналитическое продолжение  $I(\mathbf{p}, z)$  в комплексную плоскость [9].

Используя интегральное представление восстановления фазы по наклонам волнового фронта [10], получим из (7) и (11)

$$\{S_p(\mathbf{p}, z)\} = \frac{k}{4\pi^2} \iint_D \frac{d^2 \rho_0}{I(\rho_0, z)} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho'_0 \frac{I(\rho'_0, z) (\rho_0 - \rho'_0) (\rho - \rho_0)}{(\rho_0 - \rho'_0)^2 (\rho - \rho_0)^2}. \quad (12)$$

Интегрирование в (12) проводится по площади входного зрачка  $D$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ . Если на границе зрачка  $\Gamma$  фаза  $S_\Gamma(\mathbf{p}, z)$  отлична от нуля, к правой части (12) следует добавить криволинейный интеграл второго рода

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{S_\Gamma(\xi, \eta, z)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} [(\xi - x) d\eta - (\eta - y) d\xi]. \quad (13)$$

Для вихревой части вектора Умова – Пойнтинга на основе уравнения типа (6) для вектор-потенциала удается записать

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{p}, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \text{rot} \mathcal{L}_v(\xi, \eta, z) \left[ \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} - \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right] d\xi d\eta \quad (14)$$

и получить в результате для фазы следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$S(\mathbf{p}, z) = \frac{k}{4\pi^2} \iint_D \frac{d^2 \rho_0}{I(\rho_0, z)} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho'_0 \frac{I(\rho'_0, z) (\rho_0 - \rho'_0) (\rho - \rho_0)}{(\rho_0 - \rho'_0)^2 (\rho - \rho_0)^2} + \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \frac{d^2 \rho_0}{I(\rho_0, z)} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho'_0 \nabla I(\rho'_0, z) \times \nabla S(\rho'_0, z) \frac{(\rho - \rho_0) \times (\rho_0 - \rho'_0)}{(\rho_0 - \rho'_0)^2 (\rho - \rho_0)^2}. \quad (15)$$

Решить уравнение (15) итерационными методами не удастся [11], если не дополнить его опорными значениями  $\nabla S$ , содержащими информацию о завихренности хотя бы в конечном числе точек. Получить эту информацию можно из уравнения (2). Однако пока такого решения не найдено, остановимся на возможностях, предоставляемых соотношением (12) для диагностики и коррекции фазы в системах адаптивной оптики.

### Линии тока энергии, свойства вихревой и восстановление потенциальной частей фазы

Для исследования свойств оптического спекл-поля в качестве объекта был выбран лаггер – гауссов пучок, возбуждаемый резонатором с круглыми зеркалами. Начальное распределение поля на излучающей апертуре имеет вид

$$U(r, \phi) = \left(\frac{r}{a}\right)^m \exp \left\{ -\frac{r^2}{2a^2} - i \frac{k}{2F} r^2 \right\} L_n^m \left( \frac{r^2}{a^2} \right) \exp \{ im \phi \}, \quad (16)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $\phi = \arctg y/x$  – полярные координаты;  $a$  и  $F$  – параметры, характеризующие размер пучка и кривизну фазового фронта;  $L_n^m(x)$  – полином Лагерра. В случае первой аксиальной несимметричной моды ( $m = 1, n = 0$ ) на расстоянии  $z$  от источника в вакууме ( $\varepsilon = 0$ ) поле после подстановки (16) в интеграл Кирхгофа имеет вид

$$U(x, y, z) = q \Omega (1 + \Omega^2)^{-3/2} g^{1/2} \exp \left\{ 3i \operatorname{arctg} W + \frac{i \Omega}{2} \frac{x^2 + y^2}{(1 + \Omega^2)} - i \operatorname{arctg} \frac{\Omega^2 x^2 - 1}{\Omega (1 + \Omega xy)} \right\}, \quad (17)$$

$$q = \exp \left\{ -\frac{\Omega^2 (x^2 + y^2)}{2(1 + \Omega^2)} \right\}, \quad g = \Omega^2 (1 + \Omega xy)^2 + (\Omega^2 x^2 - 1)^2,$$

где  $x$  и  $y$  – нормированные на  $a$  декартовы координаты;  $\Omega = ka^2/z$  – дифракционный параметр. Из формулы (17) видно, что интенсивность принимает нулевые значения в точках  $x = 1/\Omega, y = -1$  и  $x = -1/\Omega, y = 1$  в поперечном сечении пучка. Распределение интенсивности показано на рис. 1.

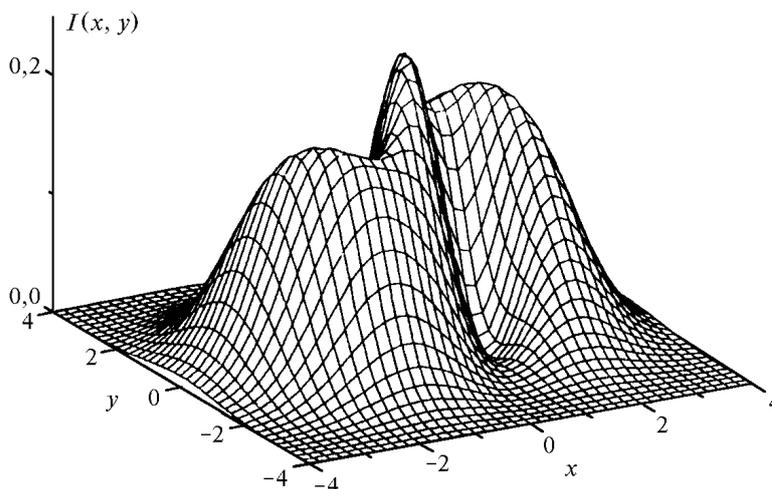


Рис. 1. Распределение интенсивности в поперечной плоскости

Вычисляя  $I(\mathbf{p}, z)$  и  $\operatorname{rot}(I \nabla S)$  с помощью (17), (14) и (12), получаем потенциальную и вихревую компоненты вектора Умова – Пойнтинга:

$$\mathcal{L}_{\perp p} = \frac{\Omega^3}{(1 + \Omega^2)^3} q^2 \{ \mathbf{l} x + \mathbf{m} y \}; \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_{\perp v} = \frac{\Omega^3}{(1 + \Omega^2)^3} q^2 \{ \mathbf{l} [fx + y(\Omega^2 x^2 - 1) - 2\Omega x (1 + \Omega xy)] + \mathbf{m} [fy + x(\Omega^2 x^2 - 1)] \}, \quad (19)$$

$$f = g/(1 + \Omega^2) - 1.$$

Соотношения (18) и (19) определяют потенциальные и вихревые плотности потока энергии векторного поля. Посредством дифференциальных уравнений для потенциальных

$$dy/dz = \Omega y/[k(1 + \Omega^2)]; \quad (20)$$

$$dx/dz = \Omega x/[k(1 + \Omega^2)]; \quad (21)$$

$$dy/dx = y/x, \quad (22)$$

а для нашего примера – и вихревых

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\Omega^2 fy + x(\Omega^2 x^2 - 1)}{k g}, \quad (23)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\Omega^2 fx + y(\Omega^2 x^2 - 1) - 2\Omega x(1 + \Omega xy)}{k g}, \quad (24)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{fy + x(\Omega^2 x^2 - 1)}{fx + y(\Omega^2 x^2 - 1) - 2\Omega x(1 + \Omega xy)} \quad (25)$$

линий тока можно построить семейство кривых, касательные к которым в каждой точке пространства совпадают с направлением вектора  $\mathcal{L}$ . На рис. 2 такие линии изображены в плоскости  $z = \text{const}$ .

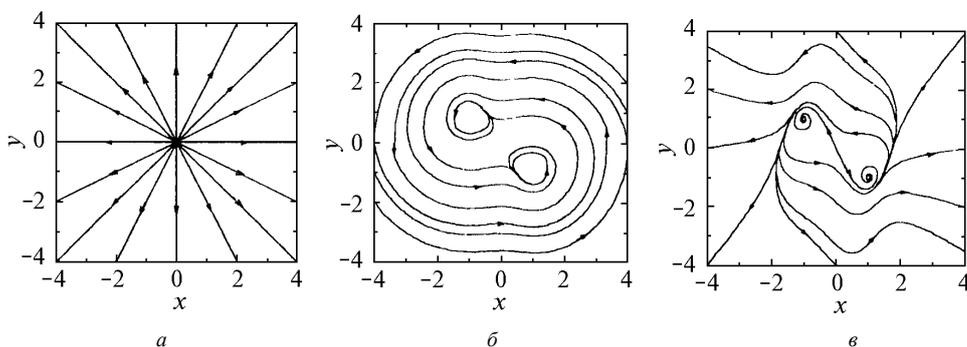


Рис. 2. Линии тока энергии для потенциального (а), вихревого (б), и полного (в) векторных полей

Из рис. 2,а видно, что для потенциального векторного поля проявляется лишь одна особая точка (анализ особых точек может быть проведен на основании теории, построенной для исследования фазовых траекторий автономных динамических систем [12]). Эта особая точка типа «неустойчивый узел» проявляется в центре координат, где одновременно обращаются в нуль числитель и знаменатель правой части дифференциального уравнения (22). На рис. 2,б показан поперечный срез вихревого векторного поля  $\mathcal{L}_v$ . Здесь проявляются три особые точки, одна из которых расположена на оси пучка ( $x = 0, y = 0$ ) и классифицируется как «седло», а две другие являются сложными фокусами и совпадают с точками, где интенсивность равна нулю. Полное векторное  $\mathcal{L}_\perp$  поле показано на рис. 2,в.

На рис. 3 представлены потенциальная часть фазы  $\{S_p(\rho, z)\}$  (а), восстановленная по формуле (12), вихревая часть фазы  $S_v$  (б) и полная фаза  $S$  (в). Из рис. 3 следует, что потенциальный волновой фронт представляет собой поверхность параболоида вращения, а особые точки вихревого векторного поля являются центрами противоположно закрученных вихревых дислокаций, разделенных седлом, где  $\nabla S(\rho, z) = 0$ . Полный фазовый фронт является суперпозицией потенциального и вихревого фазовых фронтов.

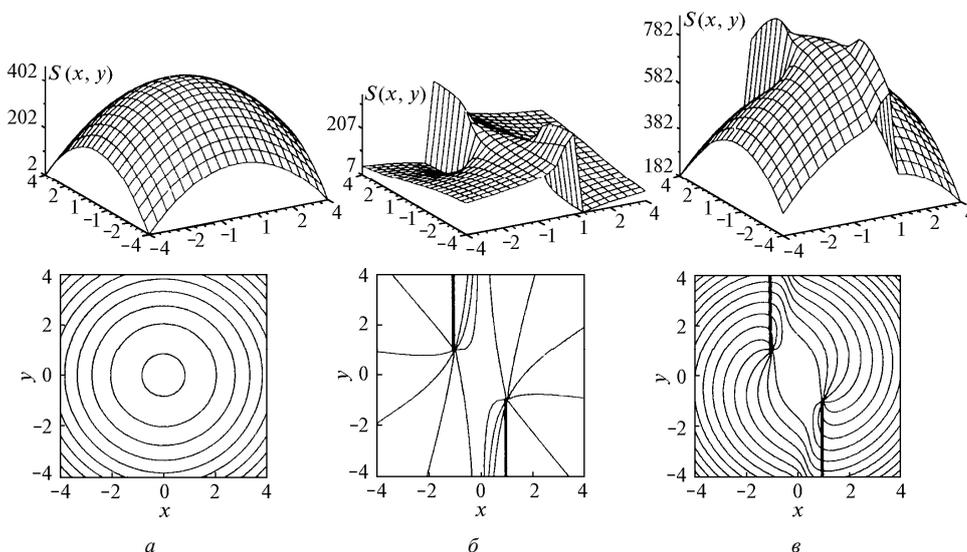


Рис. 3. Потенциальная (а), вихревая (б) и полная (в) фазы и их изолинии

### Дискуссия

В оптических адаптивных системах с фазовым сопряжением возникает проблема коррекции искажений волнового фронта, вызванных, например, атмосферной турбулентностью.

Особую сложность вызывают дислокации фазы, возникающие в точках, где интенсивность обращается в нуль. Из-за сложности воссоздания фазового фронта в области дислокаций с помощью исполнительных устройств-корректоров возникает задача получения сглаженной аппроксимации волнового фронта, близкой к реальному, например, по среднеквадратичному критерию. Подобная задача решалась, в частности, в работах [13] и [14]. Потенциальная фаза может быть использована как такая регуляризованная аппроксимация волнового фронта. Регуляризация подобного рода превращает обобщенную многомерную функцию, какой является фаза, в обычную абберационную фазу без точек сингулярности.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 94-02-09495а) и Институтом «Открытое общество» (грант а96-2803).

1. Berry M. // Singularities in waves and rays // Physics of Defects / Eds. R. Balian, M. Kleman, and J.-P. Poirier. North-Holland, Amsterdam, 1981. P. 453–543.
2. Baranova N.B., Zel'dovich B.Ya., Mamaev A.V., Pilipetsky N., and Shkunov V.V. // JETP Lett. 1981. V. 33. P. 195–199.
3. Arcicchi F.T., Giacomelli G., Ramazza P.L., and Residori S. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 3749–3752.
4. Neubecker R., Kreuzer M., and Tshudi T. // Opt. Commun. 1993. V. 96. P. 117–122.
5. Baranova N.B., Mamaev A.V., Pilipetsky N., Shkunov V.V., and Zel'dovich B.Ya. // J. Opt. Soc. Am. 1983. V. 73. P. 525–528.
6. Журавлев В.А., Кобозев И.В., Кравцов Ю.А., Пятников В.Г., Попов В.А., Шмелев А.Ю. // Акустический журнал. 1993. Т. 39. N4. С. 764–765.
7. Корн Г., Корн Е. Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 720 с.
8. Борн М., Вольф Е. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
9. Abramochkin E.G. and Volostnikov V.G. // Opt. Commun. 1989. V. 74. N 3, 4. P. 139–142.
10. Aksenov V.P. and Isaev Yu.N. // Optics Letters. 1992. V. 17. N 17. P. 1180–1182.
11. Abramochkin E.G. and Volostnikov V.G. // Opt. Commun. 1989. V. 74. N 3, 4. P. 144–148.
12. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.
13. Takijo H. and Takahashi T. // J. Opt. Soc. Am. A. 1988. V. 5. N 3. P. 416–425.
14. Takijo H. and Takahashi T. // J. Opt. Soc. Am. A. 1988. V. 5. N 11. P. 1818–1827.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
12 июля 1996 г.

V.P. Aksenov, V.A. Banakh, O.V. Tikhomirova. **Potential and Vortex Features of Optical Speckle-Fields.**

Wave front dislocations generated by vortex flow of light energy in vicinity of the points where the field intensity equals zero are studied on the base of solution of the task to retrieve the phase distribution in optical beam from the measured intensity distribution (the phase problem in optics). Reasons of an ambiguity of the phase problem solution are discussed. A concept of the vortex and potential parts of the phase is introduced. An analytic formula for retrieval the potential phase from the measured intensity distribution of optical speckle-field has been obtained. A possibility to use an information on the potential phase for correction of singular phase distortions by the optical adaptive systems is discussed.