

В.В. Войцехович, В.Г. Орлов, С. Кузвас

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБУСЛОВЛЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ ФЛУКТУАЦИЙ ЛОГАРИФМА АМПЛИТУДЫ. ПОДХОД КАРУНЕНА–ЛОЕВА

Рассматривается проблема моделирования турбулентных флуктуаций логарифма амплитуды. Приведенная модель, построенная на основе функций Карунена–Лоева, позволяет генерировать выборку флуктуаций логарифма амплитуды, обусловленных слабой турбулентностью. Достоверность рассматриваемого подхода иллюстрируется сопоставлением статистических характеристик, полученных теоретически и численно.

1. Введение

Методы псевдослучайного моделирования обусловленных турбулентностью искажений часто используются в атмосферной и адаптивной оптике [1–8]. Такое моделирование позволяет рассмотреть множество примеров, в которых аналитические методы неприменимы. Решение прикладных атмосферных задач обычно сводится к генерации искажений волнового фронта. Тем не менее существует ряд интересных проблем, в которых рассматриваются амплитудные флуктуации. Ниже описан генератор флуктуаций логарифма амплитуды, работающий на базе функций Карунена–Лоева (К–Л), который позволяет моделировать амплитудные флуктуации с заданной корреляционной функцией. В настоящей статье мы полагаем, что флуктуации изотропны и обусловлены слабой турбулентностью на вертикальной трассе.

2. Использование функций Карунена–Лоева для генерации флуктуаций логарифма амплитуды

Подход Карунена–Лоева удобен для моделирования флуктуаций, поскольку интересующий нас случайный процесс может быть представлен как линейная суперпозиция ортогональных функций со статистически независимыми коэффициентами, которые, следовательно, могут генерироваться независимо. Для того чтобы построить набор К–Л функций $L(\rho)$, необходимо решить однородное интегральное уравнение, в котором ядро задается корреляционной функцией $B(\rho_1, \rho_2)$ рассматриваемого случайного процесса:

$$\int_G d\rho_1 B(\rho_1, \rho_2) L(\rho_1) = \lambda L(\rho_2), \quad (1)$$

где G – площадь, на которой строятся К–Л функции.

Нашей основной задачей является моделирование флуктуации логарифма амплитуды на двумерной круглой площадке таким образом, чтобы связанные К–Л функции строились на этой же площадке. Подобная задача была решена Вангом и Марки, вычислившими К–Л функции для индуцированных турбулентностью искажений волнового фронта [9]. Они показали, что двумерное интегральное уравнение сводится к одномерному, если допустить, что фаза рассматриваемого случайного процесса является изотропной, т.е.

$$B(\rho_1, \rho_2) = B(|\rho_1 - \rho_2|). \quad (2)$$

Поскольку флуктуации логарифма амплитуды также могут считаться изотропными, постольку будем использовать тот же подход (некоторые детали здесь опущены, их можно найти в статье Ванга и Марки). Если условие (2) выполняется, то функция L может быть представлена в виде произведения радиальной и угловой компонент:

$$L(\rho) = K_p^q(\rho) \exp(iq\varphi), \quad (3)$$

где ρ и φ – полярные координаты вектора ρ .

Соответствующие одномерные уравнения для радиальных К–Л функций K_p^q задаются интегралом

$$\int_0^R d\rho_1 \rho_1 B^q(\rho_1, \rho_2) K_p^q(\rho_2) = \int_{pq}^2 K_p^q(\rho_2), \quad (4)$$

где R – радиус апертуры, а ядро $B^q(\rho_1, \rho_2)$ выражается в терминах корреляционной функции B_χ логарифма амплитуды следующим образом:

$$B^q(\rho_1, \rho_2) = \int_0^{2\pi} d\psi B_\chi(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos\psi}) \cos(q\psi). \quad (5)$$

В дальнейшем будем полагать, что моделируемые флуктуации логарифма амплитуды проявляются в результате слабой турбулентности на вертикальной трассе. В этих условиях корреляционная функция B_χ может быть записана как [10]

$$B_\chi(x) = 2\pi^2 k^2 0,033 \int_0^\infty dz C_n^2(z) \int_0^\infty d\xi \xi^{-8/3} J_0(\xi x) \left[1 - \cos\left(\frac{z\xi^2}{k}\right) \right], \quad (6)$$

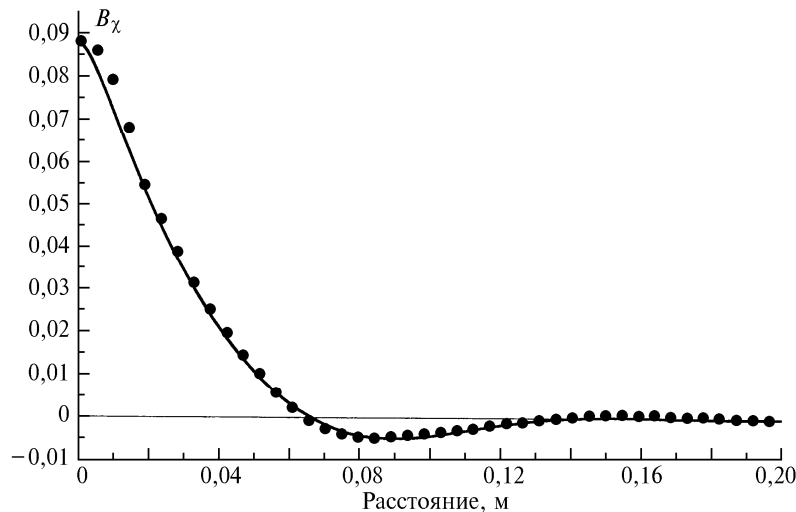
где C_n^2 – структурная характеристика вертикального профиля показателя преломления; J_0 – функция Бесселя; k – волновое число.

Для того чтобы получить окончательный результат в замкнутой форме, полагаем, что C_n^2 распределена согласно модели Хуфнагеля [11]. При параметризации по r_0 (r_0 – радиус Фрида [12]) этот профиль может быть выражен как

$$C_n^2(z) = C_0 r_0^{-5/3} k^{-2} \left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^{10} \exp\left\{-\frac{z}{z_1}\right\} + \exp\left\{-\frac{z}{z_2}\right\} \right], \quad (7)$$

где $C_0 = 1,027 \cdot 10^{-3} m^{-1}$; $z_0 = 4,632 \cdot 10^3 m$; $z_1 = 10^3 m$; $z_2 = 1,5 \cdot 10^3 m$.

В уравнениях (6) и (7) высота z и радиус Фрида r_0 даны в метрах, волновое число k – в обратных метрах, C_n^2 – в метрах в степени минус 2/3.



Корреляционная функция логарифма амплитуды, полученная теоретически (сплошная кривая) и численно (показана точками); $\bar{r}_0 = 0,1$ м

Внутренний интеграл в (6) записывается в терминах обобщенных гипергеометрических функций, после чего внешний интеграл легко может быть оценен в квадратурах Гаусса–Лагерра. Для $r_0 = 0,1$ корреляционная функция B_χ приведена на рисунке (сплошная линия).

Если функции B_χ вычислены, то интегральные уравнения (4) также могут быть решены численно после симметризации ядра и следующей подстановки переменных [7]:

$$r_1 = \rho_1^2, \quad r_2 = \rho_2^2.$$

3. Результаты моделирования

В п. 2 мы обрисовали схему вычисления К–Л функций, связанных с искажениями логарифма амплитуды. Взяв суперпозицию этих функций, имеющую случайные коэффициенты, получим искомые выборки (условия генерации коэффициентов должны быть такими же, как для соответствующих собственных значений λ_{pq}). Несколько выборок было промоделировано, для проверки достоверности модели некоторые полученные на основе этих выборок статистические характеристики сопоставлены с теоретическими данными. Результаты сопоставления приводятся ниже.

Для значения радиуса Фрида $r_0 = 0,1$ на рисунке приведены теоретическая (сплошная линия) и «экспериментальная» (точки) корреляционные функции. «Экспериментальная» кривая была получена при усреднении 10^4 выборок. Видно, что функции очень близки.

Рассмотрим некоторые возможные приложения представленного метода моделирования. Одним из таких приложений может быть анализ амплитудных флуктуаций в адаптивной оптике (другими словами, оценка того, насколько велики ошибки измерений волнового фронта при наличии таких флуктуаций). Например, их ощутимое влияние может проявиться, если масштаб флуктуаций сравним или больше области, в которой выполняется анализ. Такая ситуация возникает в современных адаптивных системах, в которых используются мультizonальные схемы. Интересные результаты также могут быть получены при анализе влияния амплитудных флуктуаций на формирование спекл-структуры, обусловленной атмосферной турбулентностью.

1. McGlamery B. L. // Proc. SPIE. 1976. V. 74. P. 225–233.
2. Roddier N. // Proc. SPIE. 1990. V. 1237. P. 668–679.
3. Roddier N. // Opt. Eng. 1990. V. 29. P. 1174–1180.
4. Takato N., Iye M., Yamaguchi I. // Publication of the Astronomical Society of the Pacific. 1994. V. 106. P. 182–188.
5. Roggermann M. C., Welsh B. M., Montera D., Rhoadarmer T. A. // Appl. Opt. 1995. V. 34. P. 4037–4051.
6. Kouznetsov D., Ortega-Martinez R. // Revista Mexicana de Fisica. 1995. V. 41. P. 563–571.
7. Cannon R. C. // JOSA A. 1996. V. 13. P. 862–867.
8. Jakobsson H. // Appl. Opt. 1996. V. 35. P. 1561–1565.
9. Wang J. Y., Markey J. K. // JOSA. 1978. V. 68. P. 78–87.
10. Tatarski V. I. Wave Propagation in a Turbulent Medium. New York: McGraw-Hill, 1961. 386 p.

Институт астрономии UNAM,
г. Мехико

Поступила в редакцию
29 июля 1996 г.

V. V. Voitsekhovich, V. G. Orlov, S. Cuevas. **Simulation of Turbulent-induced Log-amplitude Fluctuations. Karhunen–Loeve Approach.**

A problem of simulation of the turbulent-induced log-amplitude fluctuations is considered. A method based on the Karhunen–Loeve functions allowing one to generate the samplings of log-amplitude fluctuations with weak-turbulence conditions is described. A validity of the approach presented is illustrated by comparison of the theoretical statistical characteristics to those obtained from simulations.