

В.В. Колосов

ЛИНИИ ТОКА ЭНЕРГИИ В ОКРЕСТНОСТИ ДИСЛОКАЦИЙ ТРЕХМЕРНОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

На основе анализа общего интегрального решения волнового уравнения (интеграла Кирхгофа) в приближении Френеля рассмотрено поведение линий тока энергии вблизи сингулярных точек трехмерного оптического поля – дислокаций и седел фазового фронта, в которых, соответственно, обращаются в нуль амплитуда и поперечный градиент фазы поля. Установлены отличительные особенности поведения линий тока энергии от двумерного случая. Показано, что по известному распределению интенсивности метод дифракционных лучей позволяет построить винтовые линии тока в пространстве.

Выполнен анализ интерференционных картин, возникающих при интерференции спекл-поля с плоскими волнами различных направлений. Показано, что интерференционная картина может принимать вид «изломанной» раскручивающейся спирали. Причем точки излома совпадают с точками дислокаций спекл-поля. При интерференции с различными плоскими волнами вид картины существенно меняется. Однако в точках дислокации касательная к интерференционной линии сохраняет свое направление для всех интерференционных картин.

Для многих приложений когерентной оптики, где измеряется или происходит управление волновым фронтом (т.е. для задач распознавания образов, адаптивной оптики и др.), важным является исследование особенностей поведения волнового фронта в окрестностях дислокаций оптического поля, имеющего спекл-структуру.

Как правило, такие исследования основываются на анализе комплексных полиномов, формально являющихся решениями волнового уравнения. При этом обычно рассматриваются двумерные полиномы не выше второго порядка [1–3].

Результаты данной работы получены на основе анализа интегрального решения параболического волнового уравнения (т.е. в приближении дифракции Френеля). Здесь рассмотрим трехмерную задачу. В этом случае поле волны может быть представлено в виде

$$E(z, \mathbf{p}) = \frac{k_0}{2\pi i z} \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p}_0 E_0(\mathbf{p}_0) \exp \left\{ ik_0 z + \frac{ik_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2}{2z} \right\}, \quad (1)$$

где E_0 – начальное поле волны; k_0 – волновое число.

Пусть начальное поле представляет собой N независимых точечных источников

$$E_0(\mathbf{p}_0) = \frac{2\pi i}{k_0} \sum_{k=1}^N A_k e^{i\alpha_k} \delta(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0). \quad (2)$$

Тогда поле (1) будет являться результатом интерференции полей от N точечных источников и примет вид

$$E(z, \mathbf{p}) = z^{-1} \sum_{k=1}^N A_k e^{i\varphi_k}, \quad (3)$$

где $\varphi_k = k_0 z + \alpha_k + k_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}_k)^2 / 2z$.

Пусть в точке $\{z = z_0, \mathbf{p} = \mathbf{0}\}$ интерференционное поле обращается в нуль, т.е.

$$E(z_0, \mathbf{0}) = z_0^{-1} \sum_{k=1}^N A_k e^{i\varphi_{0k}} = 0, \quad (4)$$

где $\varphi_{0k} = k_0 z_0 + \alpha_k + k_0 \mathbf{p}_k^2 / 2z_0$.

Условие (4) выполняется при одновременном выполнении следующих условий:

$$\sum_{k=1}^N A_k \cos \varphi_{0k} = 0, \quad \sum_{k=1}^N A_k \sin \varphi_{0k} = 0. \quad (5)$$

Геометрически это можно представить следующим образом. Как следует из (4), поле в точке дислокации $\{z_0, 0\}$ представляет собой сумму комплексных чисел $E_k = A_k e^{i\varphi_{0k}}$. Если каждому слагаемому поставить соответственно вектор на плоскости, длина которого будет равна A_k , а угол наклона вектора к оси OX будет равен φ_{0k} , то условие (4) будет означать, что сумма векторов должна быть равна нулю. Следовательно, представляя данную сумму векторов геометрически на плоскости, получим замкнутую ломаную линию, т.е. вершина последнего (N -го) вектора совпадет с началом первого вектора.

Таким образом, любой N -угольник, вычерченный на плоскости, задает соотношение для A_k и φ_{0k} , при которых поле в плоскости $z = z_0$ имеет дислокацию в начале координат, т.е. в точке $\mathbf{p} = 0$. Это условие мы использовали при численном моделировании спекл-поля в тех случаях, когда заранее необходимо было знать точное положение дислокации.

Из (3) мы можем определить интенсивность и вектор Умова–Пойнтинга спекл-поля. Для интенсивности получаем

$$W(z, \mathbf{p}) = E(z, \mathbf{p}) E^*(z, \mathbf{p}) = z^{-2} \sum_{k=1}^N W_k(z, \mathbf{p}), \quad (6)$$

$$\text{где } W_k = \sum_{l=1}^N A_l A_k \cos[\varphi_l(z, \mathbf{p}) - \varphi_k(z, \mathbf{p})]; \quad \varphi_l(z, \mathbf{p}) - \varphi_k(z, \mathbf{p}) = \varphi_{0l} - \varphi_{0k} - \frac{k_0 \mathbf{p}}{z} (\mathbf{p}_l - \mathbf{p}_k) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right) (\mathbf{p}_l^2 - \mathbf{p}_k^2).$$

Поперечная составляющая вектора Умова–Пойнтинга определяется выражением

$$\mathbf{P}_\perp(z, \mathbf{p}) = \frac{1}{k_0} \text{Im} \{ E^* \nabla_{\mathbf{p}} E \} = z^{-3} \sum_{k=1}^N (\mathbf{p} - \mathbf{p}_k) W_k(z, \mathbf{p}). \quad (7)$$

Поведение интенсивности и вектора Умова–Пойнтинга в окрестности дислокаций можно определить из (6) и (7), устремляя в этих выражениях \mathbf{p} к нулю и выполняя соответствующие разложения тригонометрических функций в ряды Тейлора.

Тогда получаем

$$W \cong a_x x^2 + a_y y^2 + 2 a_{xy} x y, \quad \mathbf{P}_\perp \cong -\mathbf{e}_x a_y + \mathbf{e}_y a_x, \quad (8)$$

$$\text{где } \mathbf{p} = \{x, y\}; \quad \mathbf{p}_k = \{x_k, y_k\}; \quad a = a_{cx} a_{sy} - a_{sx} a_{cy};$$

$$a_x = a_{cx}^2 + a_{sx}^2; \quad a_y = a_{cy}^2 + a_{sy}^2; \quad a_{xy} = a_{cx} a_{cy} + a_{sx} a_{sy};$$

$$a_{cx} = \sum_{k=1}^N A_k x_k \cos \varphi_{0k} = 0; \quad a_{sx} = \sum_{k=1}^N A_k x_k \sin \varphi_{0k} = 0;$$

$$a_{cy} = \sum_{k=1}^N A_k y_k \cos \varphi_{0k} = 0; \quad a_{sy} = \sum_{k=1}^N A_k y_k \sin \varphi_{0k} = 0. \quad (9)$$

Из (8) следует, что в точке дислокации и ее окрестности

$$|\mathbf{P}_\perp| \cong a |\mathbf{p}|, \quad \text{rot } \mathbf{P}_\perp = 2 a.$$

Приравнивая разложение (8) для интенсивности нулю, получим уравнение вырожденной кривой второго порядка. При этом инвариант D данной кривой

$$D = \begin{vmatrix} a_x & a_{xy} \\ a_{xy} & a_y \end{vmatrix} = (a_{cx} a_{cy} - a_{sx} a_{sy})^2 = a^2$$

может быть больше или равен нулю.

Условие $D > 0$ соответствует тому, что интенсивность обращается в нуль в отдельной точке $\rho = 0$. Условие $D = 0$ соответствует случаю обращения интенсивности в нуль на линии, проходящей через точку $\rho = 0$. Для данного случая $\text{rot } \mathbf{P}_\perp = 0$, т.к. $a = 0$, т.е. поведение вектора Умова–Пойнтинга и фазы в окрестности точки, где интенсивность обращается в нуль, не имеет особенностей, характерных для винтовой дислокации. Такая ситуация наблюдается, например, при дифракции излучения на круглом или прямоугольном отверстиях, когда интенсивность обращается в нуль на замкнутых линиях или линиях, уходящих в бесконечность.

Ситуация, характерная для винтовой дислокации, представлена на рис. 1. Стрелками на рисунке изображено поле вектора Умова–Пойнтинга в плоскости. Отчетливо видны два полюса и седловая точка. Вектор Умова–Пойнтинга связан с интенсивностью W и фазой φ результирующего поля следующим соотношением:

$$\mathbf{P}_\perp(z, \rho) = \frac{1}{k_0} W(z, \rho) \nabla_\rho \varphi(z, \rho). \quad (10)$$

Точки полюсов определяются условием $W = 0$, при этом значения фазы в полюсах являются неопределенными. Седловая точка соответствует условию $\nabla_\rho \varphi = 0$. Данная картина аналогична представленной в работе [4], где рассмотрен двумерный случай. Однако поведение линий тока энергии для трехмерного случая, рассматриваемого нами, имеет существенные отличия.

На рис. 1 также представлена проекция такой линии на плоскость, перпендикулярную оси распространения. Начало данной линии совпадает с плоскостью, для которой на рисунке представлено поле вектора Умова–Пойнтинга. Видно, что энергия, совершив несколько оборотов вокруг дислокации, покидает ее. Затем энергия захватывается другой дислокацией, и процесс повторяется.



Рис. 1. Поле вектора Умова–Пойнтинга на плоскости, перпендикулярной оси распространения (стрелки), и проекция пространственной линии тока энергии на данную плоскость (сплошная линия)

При этом, по мере распространения, сама дислокация смещается в сторону другой дислокации (в данном случае по линейному закону). По мере сближения дислокаций количество энергии, совершающей круговые обороты вокруг них, уменьшается и обращается в нуль в момент их слияния. Затем дислокации, продолжая свой путь, начинают расходиться, захватывая все большее количество энергии. Далее они встречают на своем пути другие дислокации, и процесс повторяется.

Для двумерного случая [4] характерно наличие сепаратрис (предельных циклов) для линий тока энергии. Сепаратрисы представляют собой непроницаемые границы для энергии, поэтому количество энергии, захваченной дислокацией, остается неизменным. Эти различия можно объяснить следующим образом. Уравнение линий тока энергии для трехмерного случая записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dz} = \frac{1}{k_0} \nabla_{\mathbf{p}} \varphi(z, \mathbf{p}) = \mathbf{P}_{\perp}(z, \mathbf{p})/W(z, \mathbf{p}) \quad (11)$$

или

$$\frac{dx}{dz} = P_x(z, x, y) / W(z, x, y), \quad \frac{dy}{dz} = P_y(z, x, y) / W(z, x, y). \quad (12)$$

Для двумерного случая роль координаты z (эволюционной переменной) выполняет время. При этом в [4] рассмотрена ситуация, когда в правой части уравнений (12) отсутствует зависимость от эволюционной переменной и, следовательно, траектории имеют стационарный характер. В нашем случае рассматривается распространение оптической волны в свободном пространстве, и стационарные решения являются невозможными.

Кроме этого, расчеты линий тока энергии были выполнены на основе метода дифракционных лучей [5], который базируется на том, что дифракционные лучи (линии тока энергии) удовлетворяют уравнению [6]

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dz^2} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon(z, \mathbf{p}) + \frac{1}{2k_0^2} \nabla_{\mathbf{p}} (A^{-1} \Delta_{\mathbf{p}} A(z, \mathbf{p})), \quad (13)$$

где ε – возмущение диэлектрической проницаемости; A – амплитуда волны. Для свободного пространства ($\varepsilon = 0$) данное уравнение можно переписать в виде ($W = A^2$):

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dz^2} = \frac{1}{4k_0^2} \nabla_{\mathbf{p}} [W^{-1} \nabla_{\mathbf{p}}^2 W - \frac{1}{2} W^{-2} (\nabla_{\mathbf{p}} W)^2]. \quad (14)$$

Расчеты, выполненные на основе уравнений (12) и (14), совпали с точностью до погрешностей численного счета. Это указывает, с одной стороны, на применимость метода дифракционных лучей для данной ситуации, с другой стороны, на то, что распределение интенсивности спекл-поля содержит в себе информацию о его вихревой природе.

Рассмотрим поведение фазы спекл-поля. Как отмечалось в [4], фаза задает естественную параметризацию на линии тока энергии, т.к. связана с длиной линии простым дифференциальным равенством

$$d\varphi = k_0 |\boldsymbol{\theta}| dl, \quad (15)$$

где φ – фаза; l – длина линии; $\boldsymbol{\theta}$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора Умова–Пойнтинга.

Из (15) в рамках параксиального приближения для изменения фазы вдоль линии тока энергии следует выражение

$$\varphi = k_0 \int_{z_0}^{z_1} dz \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dz} \right)^2 \right] = k_0 \int_{z_0}^{z_1} dz \left[1 + \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{\perp} / W)^2 \right]. \quad (16)$$

Разность фаз между двумя произвольными точками, лежащими в одной плоскости, перпендикулярной оси распространения излучения, может быть вычислена следующим образом:

$$\Delta\varphi_{nl} = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} d l_{\perp} \nabla_{\mathbf{p}} \varphi(z_0, \mathbf{p}) = k_0 \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} W^{-1} [P_x dl_x + P_y dl_y], \quad (17)$$

где $dl_{\perp} = \{dl_x, dl_y\}$ – элемент линии, соединяющей точки \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 ; $\mathbf{P}_{\perp} = \{P_x, P_y\}$ – поперечная составляющая вектора Умова–Пойнтинга. Отметим, что для спекл-поля данная разность фаз

зависит от выбора линии, соединяющей данные точки. Для двух различных линий данная разность отличается на четное число π , если линии не пересекают дислокации, и на нечетное число π , если одна из линий пересекает одну дислокацию.

Были выполнены следующие расчеты фазы. В плоскости $z = z_0$ выбирались две точки ρ_{01} и ρ_{02} , разность фаз между которыми, вычисленная по формуле (17) вдоль прямой линии, соединяющей их, равнялась нулю. Вычислялись траектории линий тока, исходящих из данных точек и пересекающих плоскость $z = z_1$ в точках ρ_1 и ρ_2 , и набеги фаз вдоль данных линий между плоскостями $z = z_0$ и $z = z_1$ по формуле (16) (φ_1 – набег фазы вдоль первой линии, φ_2 – вдоль второй). Разность фаз $\Delta\varphi_{n1}$ между точками ρ_1 и ρ_2 в плоскости $z = z_1$ вычислялась по формуле (17) вдоль прямой линии (не пересекающей дислокацию). Для любых пар линий получали соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi_{n1} + 2\pi n \quad (n - \text{целое}). \quad (18)$$

При приближении начальной точки ρ_{01} к дислокации увеличивалось число оборотов, совершаемых линией тока энергии вокруг дислокации между зафиксированными плоскостями. С ростом числа таких оборотов возрастало число n в (18). И при стремлении ρ_{01} к точке дислокации n стремилось к бесконечности.

На рис. 2, а изображено распределение фазы спекл-поля на плоскости. На представленном участке плоскости имеется 16 дислокаций волнового поля. Изменение фазы между соседними линиями смены тона составляет $\pi/4$. Всего на рисунке 8 тонов.

Три следующих рисунка (2, б, в, г) представляют собой три интерференционные картины, каждая из которых получена в результате интерференции спекл-поля (3) с плоской волной

$$E_0(z, \rho) = A_0 e^{i k_0 z + i k_{\perp} \rho} \quad (19)$$

для трех различных направлений вектора \mathbf{k}_{\perp} .

Интерференция полей (3) и (19) дает следующее распределение интенсивности в интерференционной картине:

$$W_I(z, \rho) = A_0^2 + 2 A_0 z^{-1} \sum_{k=1}^N A_k \cos(\varphi_0 - \varphi_k) + W(z, \rho), \quad (20)$$

где $W(z, \rho)$ – интенсивность спекл-поля (6). Линии смены цвета интерференционной картины соответствуют уровню интенсивности:

$$W_I(z, \rho) = A_0^2.$$

Видно, что интерференционные картины принимают вид «изломанной» раскручивающейся спирали. Причем точки излома совпадают с точками дислокаций спекл-поля. Из (20) следует, что

$$\nabla_{\rho} W_I|_{\rho=0} = \frac{2 A_0}{z} \sum_{k=1}^N \rho_k A_k \sin\varphi_{0k}, \quad (21)$$

т.е. величина и направление градиента интенсивности в интерференционной картине в точке дислокации не зависят от направления распространения плоской волны (т.е. от вектора \mathbf{k}_{\perp}), в то время как сама интерференционная картина существенно изменяется при изменении направления плоской волны. Данный факт иллюстрируется рис. 2, д, е, на которых укрупнены соответствующие фрагменты интерференционных картин, представленных на рис. 2, в, г. Точками на рисунках отмечено положение дислокации спекл-поля. При данном численном моделировании интерференции спекл-поля с плоской волной нам пришлось использовать описанную выше процедуру для помещения дислокации в заданную точку плоскости. Отрезок прямой линии, исходящий из точки дислокации, соответствует направлению и величине градиента интенсивности интерференционного поля в точке дислокации спекл-поля. Результаты численного моделирования совпали с (21).

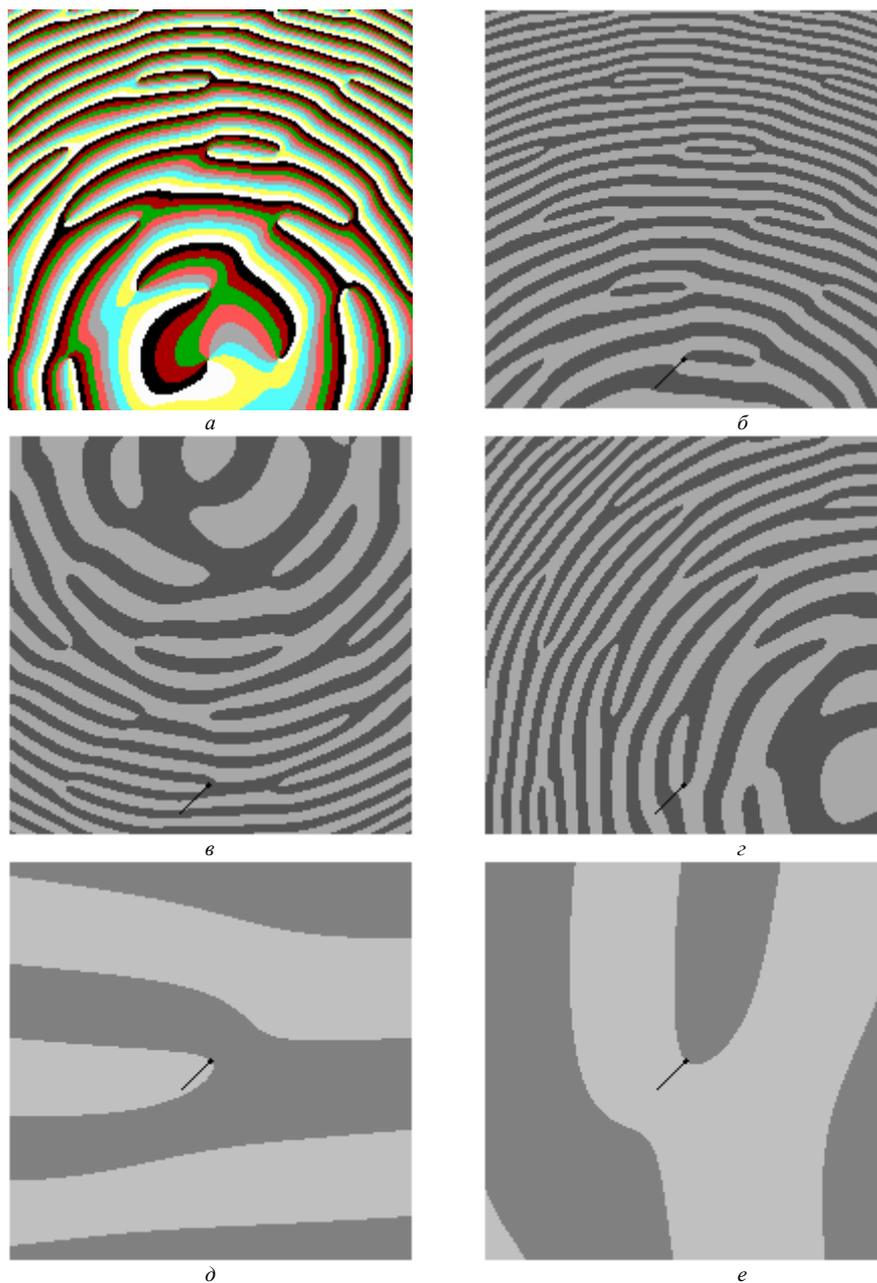


Рис. 2. Распределение фазы спекл-поля на плоскости (*a*); результат интерференции спекл-поля с плоскими волнами различного направления (*б–z*); *д* и *е* – укрупненные фрагменты интерференционных картин, представленных на рис. *в* и *z*

Данный факт позволяет путем использования двух (или больше) интерференционных картин, полученных от одного спекл-поля, с высокой точностью определять положение дислокаций данного поля на плоскости, т.к. при наложении интерференционных картин друг на друга линии смены цвета различных интерференционных картин в точках дислокаций должны касаться друг друга.

В работе мы использовали представление начального поля в форме (2). С точки зрения вывода теоретических результатов это приближение не носит принципиального характера. Все результаты работы (например, (5), (8)–(9), (20)–(21) и др.) могут быть записаны для общего случая путем замены суммирования по конечному числу точек плоскости излучения на интегрирование по всей данной плоскости. Очевидно, что такая замена не скажется на тех выводах, которые сделаны в работе на основе этих результатов.

Однако при численном моделировании представление (2) является необходимым, т. к. даже в том случае, когда мы моделируем распространение излучения от непрерывного источника, мы вынуждены от непрерывных функций переходить к сеточным (заданным на конечном числе узлов некоторой сетки) и от интегрирования по поверхности к суммированию по конечному числу узлов сетки, лежащей на данной поверхности.

Отметим также, что все основные закономерности поведения спекл-поля, описанные в статье, могут быть прослежены на примере интерференции трех точечных источников.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-02-16328-а).

1. Nye J.F. and Berry M.V. // Proc. Roy. Soc. London. A. 1974. V. 336. P. 165.
2. Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 1789.
3. Wright P.J. and Nye J.F. // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 1982. V. 305. P. 339.
4. Журавлева В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А. // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. С. 3769–3783.
5. Колосов В.В. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. № 4. С. 397–403.
6. Беспалов В.И., Литвак А.Г., Таланов В.И. // Нелинейная оптика. Труды второго всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике. Новосибирск: Наука, 1968. С. 428–463.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
7 августа 1996 г.

V.V. Kolosov. Energy Streamlines in the Neighbourhood of Dislocations of Three-dimensional Wave Field.

Based on analysis of general integral solution of wave equation (the Kirchhoff integral) in Fresnel approximation, a behaviour of the energy streamlines is considered at improper points of three-dimensional optical field, i.e. phase front dislocations and saddles, in which the amplitude and the transverse gradient of a field phase vanish. The peculiarities are revealed to distinguish the energy streamlines behaviour in two-dimensional wave field. The diffraction beams method is shown to be useful in constructing the spatial spiral streamlines by the known intensity distribution.

The interference pattern arising from the speckle field with plane waves of various directions is analyzed. It is shown, that the interference pattern can take form of «fractured» twisting spiral. The fracture points therewith coincide with the speckle field dislocations. In the case of various plane waves interfering, the pattern changes essentially. Nevertheless, in the dislocation points, the direction of a tangent to the interference line holds constant for all patterns.