

Пространственная когерентность, средний наклон волнового фронта и средний локальный волновой вектор лазерного пучка Лагерра–Гаусса за случайным фазовым экраном

В.П. Аксенов, Ф.Ю. Канев, Ч.Е. Погуца*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 18.02.2010 г.

Исследована пространственная эволюция распределения энергии и локального волнового вектора флуктуирующего вихревого лазерного пучка. Флуктуации пучка вызваны его распространением через тонкий (по сравнению с полной дистанцией распространения) слой турбулентной среды (фазовый экран). Показано, что вихревое течение энергии, присущее когерентному пучку, проявляется и в средних характеристиках частично когерентного пучка. В частности, средний наклон волнового фронта представляется в виде суммы вихревой и потенциальной компонент. Определяющую роль в циркулярном движении энергии играет ротор векторного поля средних наклонов волнового фронта. Для экрана с квадратичной структурной функцией флуктуаций фазы вихревая компонента удовлетворяет одной из моделей вихревого движения жидкости, называемой «вихрь Скалли». С увеличением расстояния от экрана потенциальная компонента поля направления средней энергии может приводить к фокусировке пучка. Ход линий тока средней энергии (средних дифракционных лучей) позволяет провести аналогию между эволюцией оптического вихря, носителем которого является лазерный пучок Лагерра–Гаусса, и распадом вихревого течения жидкости.

Ключевые слова: сингулярная оптика, вихревые пучки, оптический вихрь, дислокации волнового фронта, фазовый экран; *singular optics, vortex beams, optical vortex, wave front dislocations, phase screen.*

Введение

Оптические вихри, дислокации волнового фронта, фазовые сингулярности, точки ветвления фазовой функции – вот перечень названий, обозначающих одни и те же объекты исследования. Оптический вихрь проявляет себя как локальный минимум в поперечном распределении интенсивности некоторых типов лазеров, в спекл-картине рассеянного шероховатой поверхностью или преломленного турбулентной атмосферой лазерного излучения. Каждому такому минимуму может быть сопоставлен топологический заряд, который представляет собой число 2π рад. Эта величина возникает как результат суммирования градиента фазы вдоль замкнутого контура, окружающего область с минимальной интенсивностью. Волновой фронт в окрестности оптического вихря имеет геликоидальную структуру, поэтому из-за неопределенности фазы поля в центре вихря интенсивность должна быть точным нулем, а не просто локальным минимумом.

Изучение оптических вихрей стало предметом сформировавшегося в последние десятилетия нового

направления в оптике, названного сингулярной оптикой [1].

Лазерный пучок, в который «встроен» оптический вихрь, называют вихревым. В качестве такого пучка очень часто выступает циркулярная лаггергауссова мода (LG_0^1) [2], которая является наиболее характерным примером пучков, несущих оптический вихрь. Если когерентный ЛГ-пучок распространяется в однородной среде, нули интенсивности составляют нуль-линию, совпадающую с осью пучка, а оптический вихрь сохраняет свою структуру на всем протяжении пучка. Если первоначально когерентный свет распространяется в турбулентной [3] или рассеивающей [4] среде, в пучке появляется некогерентная составляющая, нуль превращается в минимум среднего распределения интенсивности. Примерно таким же образом ведет себя средняя интенсивность вихревого пучка, первичное поле которого является случайным (частично-когерентным) [5].

Замечательным качеством вихревых ЛГ-пучков является обладание ими орбитальным угловым моментом (ОУМ) [6]. ОУМ подчиняется закону сохранения, который при распространении света в случайно-неоднородной среде выполняется «в среднем» [7]. Если в среднем распределении минимум интенсивности ЛГ-пучка перестает быть нулем,

* Валерий Петрович Аксенов; Федор Юрьевич Канев (kanev@iao.ru); Чеслав Евгеньевич Погуца.

а средний орбитальный угловой момент остается равным своему исходному значению, то что же происходит с оптическим вихрем? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим прохождение простейшей циркулярной предварительно сфокусированной ЛГ-моды LG_0^l через фазовый экран, находящийся в плоскости $z = 0$.

1. Пространственная когерентность вихревого пучка за фазовым экраном

Граничное значение поля $u(\mathbf{r}; z)$ в плоскости экрана будет иметь вид

$$u(\mathbf{r}; 0) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{8\Phi}{c}} \left(\frac{x + iy}{a} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) \exp\left(-i\frac{r^2}{2F} - iS(\mathbf{r})\right), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}\{x, y\}$ – вектор в поперечной плоскости; c – скорость света; Φ – полный поток энергии; a – эффективный радиус пучка; F – радиус волнового фронта; $S(\mathbf{r})$ – случайная фаза. Предположим, что флуктуации $S(\mathbf{r})$ статистически однородны, имеют нулевое среднее значение $\langle S(\mathbf{r}) \rangle = 0$, где $\langle \rangle$ – усреднение по ансамблю реализаций, и подчиняются нормальному закону распределения вероятностей. Эти предположения, а также распределение граничного поля (1) позволяют записать для функции взаимной когерентности в исходной плоскости следующее выражение:

$$\Gamma_{2,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0) = \langle u(\mathbf{r}_1; 0)u^*(\mathbf{r}_2; 0) \rangle = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)\Gamma_{2,0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0), \quad (2)$$

где

$$\Gamma_{2,0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0) = \frac{1}{a^4} \frac{8\Phi}{c} \exp\left(-\frac{1}{2a^2}(r_1^2 + r_2^2)\right) \times \exp\left(-i\frac{1}{2F}(r_1^2 - r_2^2) - \frac{1}{2}D_S(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right) \quad (3)$$

– функция когерентности гауссова светового пучка; $D_S(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle [S(\mathbf{r}_1) - S(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle$ – структурная функция разности фаз. Для простоты расчетов используем аппроксимацию функции $D_S(\mathbf{r})$ следующего вида:

$$D_S(\mathbf{r}) = r^2/(2a_c^2), \quad (4)$$

где a_c – радиус когерентности пучка в исходной плоскости. Модель (4) используется для больших флуктуаций, когда дисперсия флуктуаций фазы $\sigma_S^2 \gg 1$ [8]. В этом случае

$$a_c = 1/\sqrt{2|B_S''(0)|},$$

где $B_S(\mathbf{r}) = \langle S(\mathbf{r}_1)S(\mathbf{r}_2) \rangle$ – функция корреляции фазы; штрихом обозначено дифференцирование по r . Если фазовый экран моделирует тонкий по сравнению со всей длиной трассы слой турбулентной атмосферы (толщина слоя $\Delta z \ll z$) [8, 9], то аппрок-

симация (4) становится справедливой, когда $D_S(l_0) \gg 1$, а

$$D_S(r) = 8,8C_n^2 k^2 \Delta z \kappa_m^{-5/3} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 r^2}{4}\right) - 1 \right], \quad (5)$$

где C_n^2 – структурная характеристика показателя преломления; l_0 – внутренний масштаб турбулентности; $\kappa_m = 5,92/l_0$; ${}_1F_1(a, b, x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция [10]. В этом случае

$$a_c = (6,56C_n^2 k^2 \Delta z l_0^{-1/3})^{-1/2}. \quad (6)$$

Заметим, что использование структурной функции вида (4) в нашем исследовании эквивалентно использованию модели Гаусса–Шелла при описании распространения излучения частично-когерентных лазерных источников [11]. Преобразование граничного поля при удалении от экрана будем рассматривать в приближении Френеля. Тогда в полупространстве $z \geq 0$ за экраном для

$$\Gamma_{2,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \langle u(\mathbf{r}_1; z)u^*(\mathbf{r}_2; z) \rangle$$

получим

$$\Gamma_{2,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \frac{k^2}{4\pi^2 z^2} \iint d^2 r'_1 \iint d^2 r'_2 \Gamma_{2,1}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)^2]\right\}. \quad (7)$$

Введем в (7) суммарно-разностные координаты в плоскости наблюдения и в плоскости интегрирования $\mathbf{R}' = (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2)/2$; $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$. С учетом (2)–(4) и (7) после интегрирования по \mathbf{R}' и \mathbf{r}' получим

$$\Gamma_{2,1}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; z) = \Gamma_{2,0}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; z) \left\{ 1 - \frac{g^2}{g^2 + \frac{a^2}{a_c^2}} \left[1 - \frac{R^2}{a_e^2} \right] - \frac{\rho^2}{4\rho_{a2}^2} - i \frac{\Omega \left(1 - \frac{z}{F}\right) a^2 \mathbf{R} \mathbf{r}}{g^2 + \frac{a^2}{a_c^2}} - i \frac{R_x \rho_y - R_y \rho_x}{a_e^2} \right\}. \quad (8)$$

Здесь

$$\Gamma_{2,0}(\mathbf{R}, \mathbf{r}; z) = \frac{8\Phi}{ca_e^2} \exp\left\{-\frac{R^2}{a_e^2} - \frac{\rho^2}{4\rho_{a1}^2} + i \frac{\chi}{a_e^2} \mathbf{R} \mathbf{r}\right\}; \quad (9)$$

$$a_e = a \left[\left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 + \Omega^2 \left(1 + \frac{a^2}{a_c^2}\right) \right]^{1/2};$$

$$\rho_{a1}^2 = a_e^2 \left(1 + \frac{a^2}{a_c^2}\right)^{-1}; \quad \chi = \Omega^{-1} \left(1 + \frac{a^2}{a_c^2}\right) - \Omega \left(1 - \frac{z}{F}\right);$$

$$\rho_{a2} = a_e \left[1 + \frac{a^2}{a_c^2} - \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 \frac{a^2}{a_c^2} \right]^{-1/2};$$

$$g^2 = 1 + \Omega^2 \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2; \quad \Omega = \frac{ka^2}{z}.$$

Совмещая координаты точек наблюдения в (8) ($\rho = 0$), получим выражения для средних интенсивностей

$$\langle I_1(\mathbf{R}) \rangle = \langle I_0(\mathbf{R}) \rangle \left\{ 1 - \frac{g^2}{g^2 + \frac{a^2}{a_c^2}} \left[1 - \frac{R^2}{a_e^2} \right] \right\}, \quad (10)$$

$$\langle I_0(\mathbf{R}) \rangle = \frac{8\Phi}{ca_e^2} \exp\left\{-\frac{R^2}{a_e^2}\right\}. \quad (11)$$

Соотношения вида (8)–(11) получены недавно в работах [12, 13], посвященных исследованию распространения частично-когерентного лазерного пучка, несущего оптический вихрь. Соотношения (8)–(11) позволяют получить нормированные величины

$$\gamma_{2,i}(\mathbf{R}, \rho; z) = \frac{\Gamma_{2,i}(\mathbf{R}, \rho; z)}{\left[\langle I_i(\mathbf{R} + \rho/2) \rangle \langle I_i(\mathbf{R} - \rho/2) \rangle\right]^{1/2}}, \quad i=0,1, \quad (12)$$

представляющие собой комплексные степени когерентности и их модули $|\gamma_{2,i}(\mathbf{R}, \rho; z)|$, по которым определяется радиус когерентности ρ_{ci} пучка в плоскости z . Для гауссова пучка, определяя радиус когерентности по убыванию $|\gamma_{2,0}|$ до уровня e^{-1} , получим известное значение [11]:

$$\rho_{c0} = 2a_c \left[\left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 + \Omega^2 \left(1 + \frac{a^2}{a_c^2}\right) \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Поведение когерентности для ЛГ-пучка оказывается более сложным. Это связано с появлением областей в поперечной плоскости, в которых действительная и мнимая части комплексной функции $\Gamma_{2,1}(\mathbf{R}, \rho; z)$ оказываются равными нулю, и с возникновением так называемых корреляционных сингулярностей: кольцевых дислокаций или корреляционных вихрей [14]. Если $\mathbf{R}' = 0$, реализуется случай кольцевой дислокации. Тогда степень пространственной когерентности принимает вид

$$\gamma_{2,1}(0, \rho; z) = \exp\left\{-\frac{\rho^2}{\rho_{c0}^2}\right\} \left\{ \frac{a^2}{g^2 a_c^2 + a^2} - \frac{\rho^2}{4\rho_{a2}^2} \right\} \times \left\{ \frac{a^2}{g^2 a_c^2 + a^2} + \frac{g^2 a_c^2}{g^2 a_c^2 + a^2} \frac{\rho^2}{4a_e^2} \right\}^{-1} \quad (14)$$

и при значениях аргумента

$$\rho = \rho_{c2} = \pm 2a \frac{\rho_{a2}}{(g^2 a_c^2 + a^2)^{1/2}} \quad (15)$$

обращается в нуль. Не останавливаясь на функции когерентности, рассмотрим средний вектор Умова–Пойнтинга вихревого пучка, прошедшего экран.

Пространственная когерентность, средний наклон волнового фронта и средний локальный волновой вектор... 385

9. Оптика атмосферы и океана, № 5.

2. Среднее поле вектора плотности потока энергии

Поперечную компоненту этого вектора $\langle \mathbf{L}_\perp(\mathbf{R}, z) \rangle$ представим как [8]:

$$\langle \mathbf{L}_\perp(\mathbf{R}, z) \rangle = \frac{1}{ik} \nabla_\perp \Gamma_{2,1}(\mathbf{R}, \rho; z) \Big|_{\rho=0} = \langle I(\mathbf{R}, z) \nabla_\perp S(\mathbf{R}, z) \rangle. \quad (16)$$

Здесь

$$\nabla_\perp = \{\partial_{\rho x}, \partial_{\rho y}\}, \quad \nabla_\perp = \{\partial_x, \partial_y\}.$$

Исследуем свойства векторного поля $\langle \mathbf{L}_\perp(\mathbf{R}, z) \rangle$. Умножив векторно обе части уравнения (16) на оператор ∇_\perp (применив операцию rot), получим вектор вихря (завихренность)

$$\Omega(\mathbf{R}, z) = \nabla_\perp \times \langle \mathbf{L}_\perp(\mathbf{R}, z) \rangle = \text{rot} \langle \mathbf{L}_\perp(\mathbf{R}, z) \rangle.$$

Используя (8)–(11), установим, что этот вектор будет иметь только одну ненулевую компоненту

$$\Omega_{Lz}(\mathbf{R}, z) = \frac{16\Phi \Omega^4}{ck} \frac{g^2 + \frac{a^2}{a_c^2} - \frac{\Omega^2}{a^2} R^2}{\left(g^2 + \frac{a^2}{a_c^2}\right)} \times \exp\left\{-\frac{\Omega^2}{a^2 \left(g^2 + \frac{a^2}{a_c^2}\right)} R^2\right\}, \quad (17)$$

которая является пространственным аналогом удвоенной локальной угловой скорости среды.

Поведение этой величины в зависимости от параметров фазового экрана и пучка показано на рис. 1, из которого следует, что при увеличении флуктуаций фазы на экране завихренность среднего поля вектора Пойнтинга уменьшается. Нетрудно установить, что выполняется статистический «закон сохранения»:

$$\int \Omega_{Lz}(\mathbf{R}, z) d\mathbf{R} = 0,$$

который является следствием соответствующего динамического соотношения [15]. Кроме поперечной компоненты средний вектор Пойнтинга имеет и продольную компоненту

$$\langle L_z(\mathbf{R}, z) \rangle = k \langle I(\mathbf{R}, z) \rangle. \quad (18)$$

Пространственное распределение среднего потока мощности можно описать с помощью совокупности линий среднего тока (средних дифракционных лучей). Эти линии являются интегральными кривыми дифференциального уравнения первого порядка вида [16]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dz} = \frac{\langle \mathbf{L}_\perp(\mathbf{R}, z) \rangle}{\langle L_z(\mathbf{R}, z) \rangle} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{R}; z). \quad (19)$$

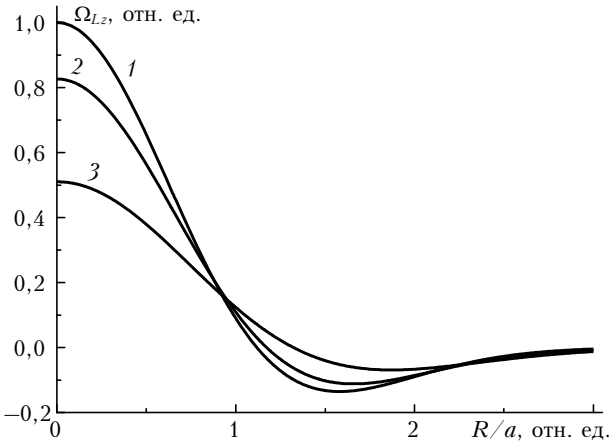


Рис. 1. Ротор среднего вектора Умова–Пойнтинга при $z/F = 0$, $\Omega = 2$, $a = 0,05$ м, нормированный на максимальное значение ротора для когерентного пучка (кривая 1 – когерентный пучок; кривая 2 – $a_c = 0,071$ м, кривая 3 – $0,035$ м)

До построения линий тока исследуем векторное поле

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{R}; z) = \frac{\langle I(\mathbf{R}; z) \nabla_\perp S(\mathbf{R}; z) \rangle}{k \langle I(\mathbf{R}, z) \rangle}, \quad (20)$$

которое назовем полем наклонов (полем направлений) среднего волнового фронта.

3. Средний наклон волнового фронта вихревого пучка. Линии тока энергии

Величина, подобная $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{R}; z)$, использовалась в [17] для восстановления фазы, «усредненной по спеклам». Применим операцию rot к векторному полю (20) и с учетом (8)–(11) и (16), (18) получим

$$\Omega_{\alpha z}(\mathbf{R}, z) = \text{rot} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{R}, z)_z = 2 \frac{a_c^2 k}{z^2} [1 + (R/\varepsilon)^2]^{-2}, \quad (21)$$

где $\varepsilon = \frac{z}{k a_c} \sqrt{\frac{g^2 + a^2/a_c^2}{g^2}}$ – эффективный размер вихря.

На рис. 2 представлена завихренность (21), нормированная на свое максимальное значение (при $a_c = 0,17$ м) на оси вихря. Как видно, завихренность уменьшается при возрастании фазовых искажений на экране и при удалении от экрана.

Источник вихря (21) индуцирует циркулярную компоненту наклона среднего волнового фронта $\boldsymbol{\alpha}_{\text{vort}}(\mathbf{R}, z)$, которая может быть найдена по формуле

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{vort}}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{\alpha z}(\xi, \eta, z) \nabla_\perp h_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (22)$$

где $h_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \arg(x + iy)$. Используя (21) и (22), получим

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{vort}}(x, y, z) = \frac{1}{z} \frac{\Omega_c}{1 + (R/\varepsilon)^2} (-ly + \mathbf{m}x). \quad (23)$$

Здесь $\Omega_c = ka_c^2/z$. Проинтегрируем $\boldsymbol{\alpha}_{\text{vort}}(x, y, z)$ по замкнутому контуру γ , окружающему точку $\mathbf{r}_d\{x_d, y_d\}$, чтобы определить суммарный топологический заряд (суммарную интенсивность вихрей), находящийся внутри контура

$$\Gamma_\alpha(\mathbf{r}_d, \gamma) = \oint_\gamma \boldsymbol{\alpha}_{\text{vort}}(\mathbf{R}; z) d\mathbf{R}\ddot{y} \quad (24)$$

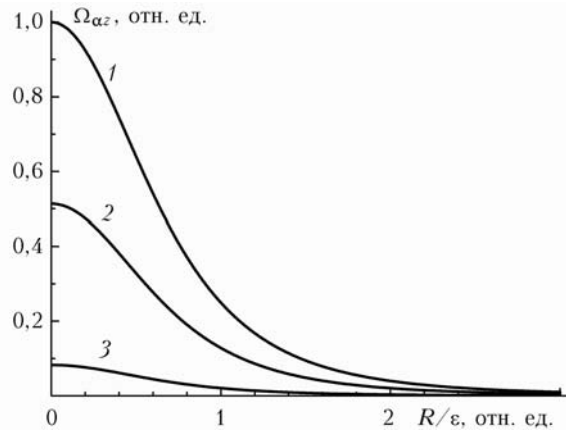


Рис. 2. Ротор средних наклонов волнового фронта при $z/F = 0$, $\Omega = 2$, $a = 0,05$ м, нормированный на максимальное значение ротора для пучка с радиусом когерентности $a_c = 0,247$ м (кривая 1 – $a_c = 0,247$ м, 2 – $0,177$, 3 – $0,071$ м)

Если контур представляет собой окружность радиуса R с центром, помещенным в начало координат, из (24) будем иметь

$$\Gamma_\alpha(0, R) = 2\pi \frac{\Omega_c}{z} \frac{R^2}{1 + (R/\varepsilon)^2}. \quad (25)$$

Для $R \gg \varepsilon$ вместо (25) получим

$$\Gamma_\alpha(0, R \rightarrow \infty) = \frac{2\pi}{k} \left(1 + \frac{a^2}{a_c^2 g^2} \right). \quad (26)$$

Откуда следует, что для фазового экрана без флуктуаций ($a_c \rightarrow \infty$) соотношение (26) с учетом (20) превращается в соотношение

$$\Gamma_\alpha(0, R \rightarrow \infty) = 2\pi/k, \quad (27)$$

являющееся признаком наличия оптического вихря на оси пучка [1].

На рис. 3 приведены кривые, описывающие поведение суммарного топологического заряда вихря, попадающего внутрь окружности радиуса R .

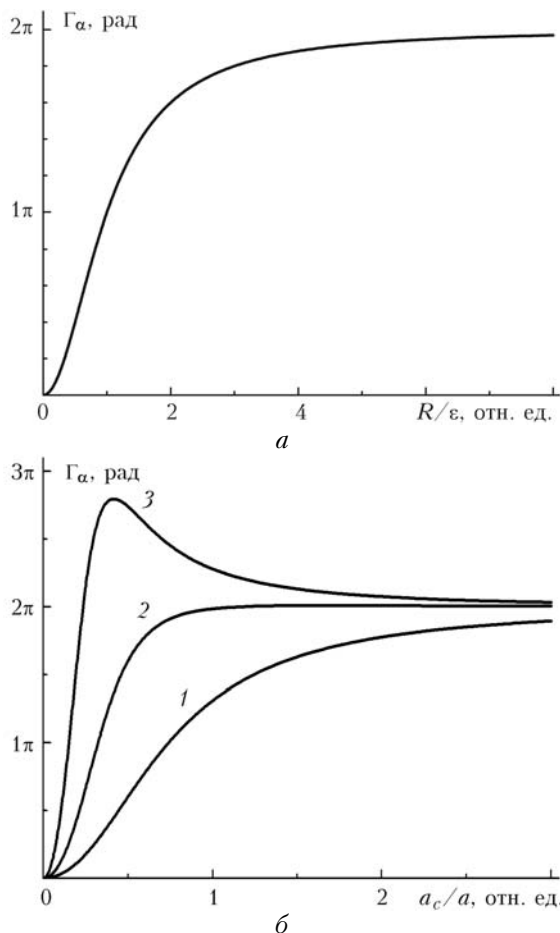


Рис. 3. Циркуляция средних наклонов волнового фронта, нормированная на свое предельное значение в случае предельно большого контура интегрирования (a); нормированная циркуляция средних наклонов волнового фронта при $z/F = 0$, $\Omega = 2$, $a = 0,05$ м; $R/a = 0,6$ (кривая 1); 1,2 (2); 2,4 (3) (b). Абсолютная величина вихревой компоненты средних наклонов волнового фронта при $z/F = 0$, $\Omega = 2$, $a = 0,05$ м; $a_c = 0,247$ м (кривая 1); 0,177 м (2); 0,071 м (3)

Этот суммарный заряд ведет себя (рис. 3, a) примерно так же, как циркуляция среднего локального волнового вектора

$$\langle \mathbf{k}(\mathbf{R}) \rangle = \langle \nabla_{\perp} S(\mathbf{R}) \rangle \quad (28)$$

частично-когерентного вихревого пучка из [18], которая монотонно возрастает, достигая своего предельного значения на границе пучка. Однако предельное значение циркуляции (26) в общем случае превышает предельное значение циркуляции из работы [18], которое (с учетом фактора $1/k$) независимо от степени когерентности пучка оказывается равным $2\pi/k$. Рис. 3, b демонстрирует зависимость средней по ансамблю величины циркуляции от начальной когерентности пучка.

Поскольку косвенным образом $\alpha(\mathbf{R}; z)$ связана с распределением оптических вихрей (разного топологического заряда и знака [1]) в случайных реализациях волнового поля, существование максимума на кривой может быть объяснено значи-

тельной концентрацией оптических вихрей одного знака (единичного или кратного единице топологического заряда) в случайных реализациях поля. Кривой 3 может соответствовать следующий сценарий развития событий на волновом фронте вихревого пучка.

Будем двигаться обратным ходом по оси абсцисс от больших a_c к малым. При слабой интенсивности флуктуаций фазы на экране в поперечном сечении пучка присутствует только исходный оптический вихрь, который смещается случайным образом за счет флуктуаций показателя преломления на экране и может выходить за пределы контура интегрирования. При усилении флуктуаций показателя преломления в результате деструктивной интерференции возникают новые оптические вихри. Возникают пары вихрей с противоположным направлением вращения (вихревой диполь). На этом этапе плечо диполя оказывается достаточно большим, так что вклад в значение циркуляции по заданному ограниченному контуру вносят только вихри одного знака. С уменьшением исходной когерентности плечо диполя уменьшается и внутрь контура интегрирования начинают попадать вихри противоположных знаков. Это приводит к убыванию циркуляции. Циркуляция начинает убывать еще быстрее, когда с дальнейшим уменьшением a_c первичный вихрь все реже оказывается внутри контура интегрирования.

Направление вектора $\alpha_{vort}(x, y, z)$ (23) совпадает с направлением касательной к окружности. Его абсолютная величина имеет вид

$$|\alpha_{vort}(\mathbf{R}, z)| = \frac{\Omega_c}{z} \frac{R}{1 + (R/\epsilon)^2}. \quad (29)$$

Из кривых, построенных по формуле (29) для различных значений a_c и приведенных на рис. 4, следует, что на масштабе, равном эффективному размеру вихря $\Omega_{az}(\mathbf{R}, z)$, модуль вектора $\alpha_{vort}(x, y, z)$ максимален.

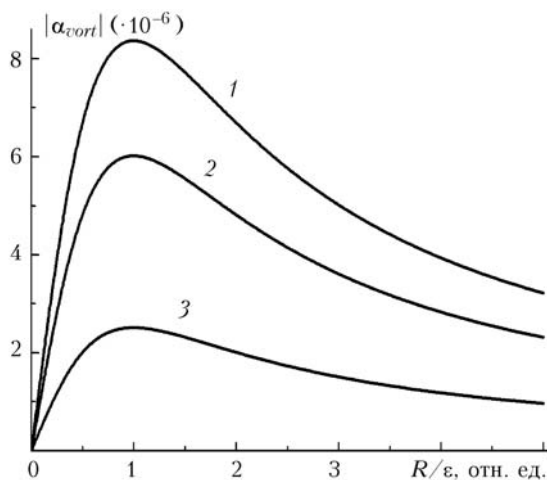


Рис. 4. Абсолютная величина вихревой компоненты средних наклонов волнового фронта при $z/F = 0$, $\Omega = 2$, $a = 0,05$ м, $a_c = 0,247$ м (кривая 1); 0,177 (2); 0,071 м (3)

Причем в приосевой области пучка ($R \ll \epsilon$) средний наклон волнового фронта линейно возрастает от нуля (как линейная скорость вращающегося твердого тела), а на периферии пучка ($R \gg \epsilon$) убывает обратно пропорционально расстоянию так же, как скорость вращающейся жидкости [18].

Аналогия векторному полю $\alpha_{vort}(\mathbf{R}, z)$, описываемому соотношениями (21)–(29), существует в гидродинамике в ситуации, когда совокупность точечных вихрей с плотностью распределения (21) индуцирует в жидкости вращательное движение с пространственным распределением скорости, подобным (29). Гидродинамическая модель, отвечающая такому движению, называется «вихрь Скалли» [19]. Помимо вихревой составляющей векторное поле содержит потенциальную составляющую $\alpha_{pot}(\mathbf{R}, z)$, так что

$$\alpha(\mathbf{R}, z) = \alpha_{pot}(\mathbf{R}, z) + \alpha_{vort}(\mathbf{R}, z). \quad (30)$$

Выражение для этого поля можно записать, получив вначале $\alpha(\mathbf{R}, z)$ по формуле (20) и исключив из него вихревое поле (23):

$$\alpha_{pot}(\mathbf{R}, z) = \frac{1}{z} \times \left\{ 1 - \frac{2\Omega_c \sqrt{g^2 - 1} \left[1 - \frac{z}{k\Omega_c \epsilon^2} \left(1 - \frac{a^2}{2a_c^2 g^2} (R/\epsilon)^2 \right) \right]}{1 + (R/\epsilon)^2} \right\} (lx + my). \quad (31)$$

Нетрудно установить [20], что в процессе пространственной эволюции пучка в среднем энергия движется по кругу [за счет вихревой компоненты (23)] и по радиусу в соответствии с (28). Причем направление движения по радиусу может менять знак. Это изменение происходит на «седловом» кольце, радиус которого R_s без особого труда определяется из (29):

$$R_s = \epsilon \left[\Omega^2 \left[1 - (z/F)^2 \right] - \left(1 + a^2/a_c^2 \right) \right]^{1/2} \times \left[\Omega^2 (z/F - 1) + \left(1 + a^2/a_c^2 \right) \right]^{-1/2}.$$

На основе уравнений (19), (23), (30), (31) удается построить линии тока средней энергии (средние дифракционные лучи) за хаотическим фазовым экраном. Вид их представлен на рис. 5.

Линии тока ведут себя в полном соответствии с поведением вихревой и потенциальной компонент $\alpha(\mathbf{R}, z)$. Если искажения фазы на экране сравнительно невелики, спиральный ход дифракционных лучей сохраняется. Чем ближе к центру пучка точка, из которой исходит луч, тем вращательный компонент среднего наклона волнового фронта меньше, причем при удалении от экрана луч может смещаться к центру пучка, а наклон, обусловленный вращением, соответственно уменьшаться. Линии

тока на рис. 5 напоминают линии тока, соответствующие распаду вихревого движения в вязкой жидкости [19].

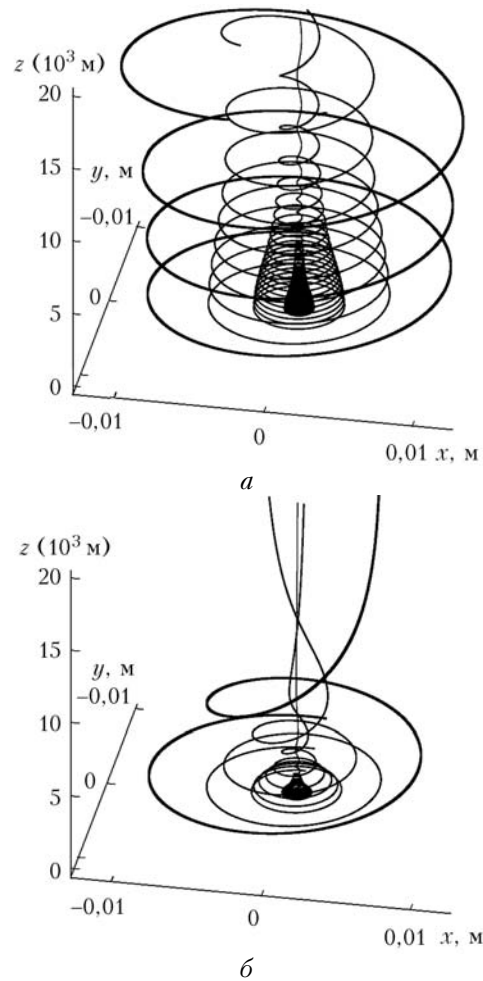


Рис. 5. Линии среднего тока энергии LG_0^1 пучка при $a = 0,05$ м; $a_c = 0,247$ м (а); при $a = 0,05$ м; $a_c = 0,071$ м (б)

4. Среднее поле локального волнового вектора вихревого пучка и его топологические свойства.

Численная модель

Для численного исследования распространения в атмосфере LG_0^1 пучка была построена модель оптической системы, в которой пучок проходил фазовый экран, вносящий искажения, соответствующие тонкому слою турбулентной среды [21], и участок свободной дифракции. Интенсивность турбулентности задавалась с помощью радиуса Фрида

$$r_0 = (0,423 C_n^2 k^2 \Delta z)^{-3/5}.$$

В плоскости наблюдения регистрировались действительная и мнимая части комплексной амплитуды поля. По этим данным вычислялись распределения интенсивности и фазы и локальный волновой вектор $\mathbf{k}(\mathbf{R}; z)$ по формуле

$$\mathbf{k}(\mathbf{R}; z) = \nabla_{\perp} S(\mathbf{R}, z) = \frac{\text{Re}u \nabla_{\perp} \text{Im}u - \text{Im}u \nabla_{\perp} \text{Re}u}{|u|^2}.$$

Далее исследовались вихревые свойства локального волнового вектора $\mathbf{k}(\mathbf{R}; z)$ через вычисление циркуляций

$$\Gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_d, \gamma) = \oint_{\gamma} \mathbf{k}(\mathbf{R}; z) d\mathbf{R} \quad (32)$$

Здесь так же, как и в формуле (24), интегрирование осуществляется по замкнутому контуру γ с центром в точке с координатами $\mathbf{r}_d \{x_d, y_d\}$. На рис. 6 изображены значения циркуляций $\Gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_d, \gamma)$, зарегистрированные в отдельных реализациях.

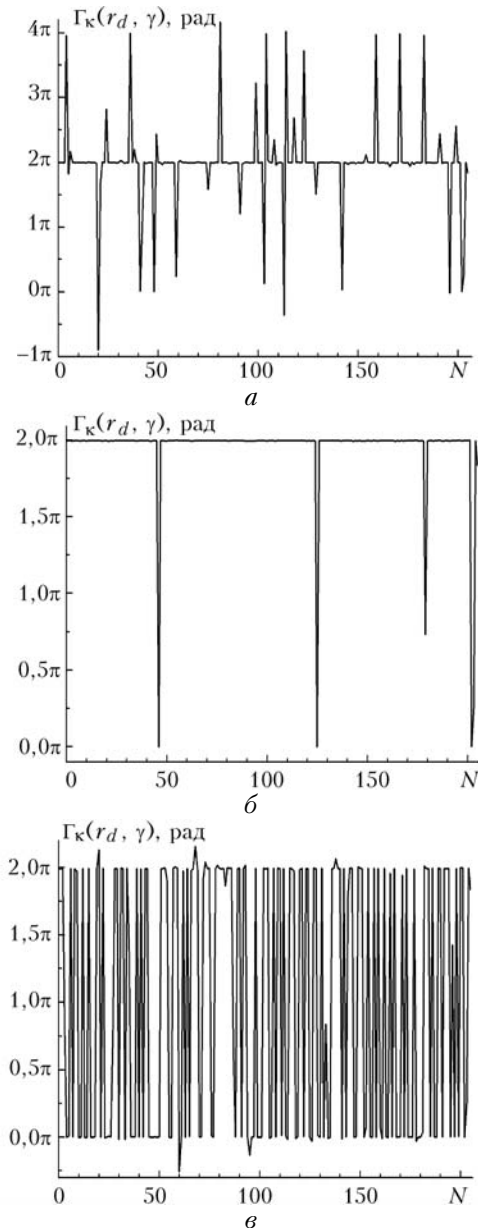


Рис. 6. Значения циркуляции при различных размерах области интегрирования: сторона квадрата составляла 2,54 (а), 1,6 (б) и 0,4 диаметра (в); $\Omega = 2$, $r_0/a = 0,075$

Контур интегрирования представлял собой квадрат с центром в начале координат $r_d = 0$. Поведение $\Gamma_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_d, \gamma)$ на рис. 6 в целом отражает те события, которые уже упоминались в предыдущем разделе. Перечислим основные:

- а) первичный оптический вихрь попадает или не попадает внутрь контура интегрирования;
- б) внутрь контура интегрирования наряду с первичным попадает вторичный сгенерированный вихрь того же знака, что и первичный, либо противоположного знака.

Кроме того, реализуются ситуации, в которых вихри оказываются слишком близко к контуру интегрирования, и в результате ошибок в вычислении циркуляции (32) результат находится в диапазоне от 0 до 2π .

На рис. 7 изображены усредненные по ансамблю из 205 реализаций значения циркуляций локального волнового вектора.

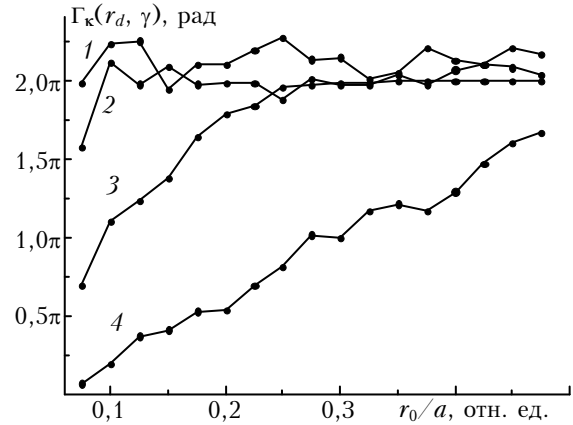


Рис. 7. Зависимость усредненных (по 205 реализациям) циркуляций от r_0 . Размерность расчетной сетки 512×512 , $\Omega = 3,3$; γ – квадрат со стороной, равной $3,0a$ (кривая 1), $2,4a$ (2), $1,6a$ (3) и $0,4a$ (4); $r_d = 0$

Поведение кривых на рис. 7 и рис. 3, б качественно совпадает. Перекроем плоскость наблюдения сетью квадратных контуров интегрирования γ . Вычислим циркуляцию по каждому из контуров. Если теперь нормировать полученные интегралы на площадь под каждым контуром и устремить площадь контура к нулю, то согласно теореме Стокса [22] полученный результат определит ротор векторной функции точки $\mathbf{k}(\mathbf{R}; z)$. Подобная функция представлена на рис. 8, где показан усредненный по 400 реализациям результат расчета циркуляций (по 25 контурам γ_{1-25}), отнесенных к площади, ограниченной одним контуром.

Экстремум, регистрируемый по средним значениям отдельных циркуляций, всегда находится в центре, но его величина существенно спадает при значительных искажениях излучения на фазовом экране. Сравнение рис. 8 и 2 позволяет подтвердить вывод о качественном согласии пространственной динамики векторного поля среднего наклона волнового фронта $\alpha(\mathbf{R}, z)$ и среднего поля волнового вектора $\langle \mathbf{k}(\mathbf{R}, z) \rangle$.

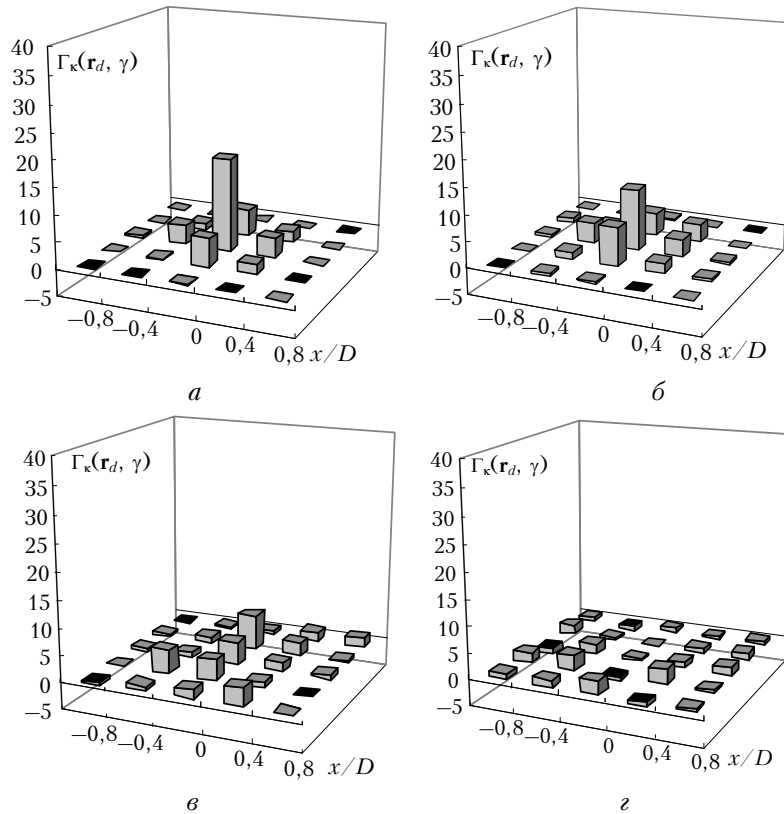


Рис. 8. Изменение среднего распределения циркуляций (ротора) локального волнового вектора при увеличении турбулентности среды (приведены значения, усредненные по 400 реализациям); $\Omega = 3,3$; $r_0/a = 0,450$ (а), $0,300$ (б), $0,175$ (в) и $0,075$ (г)

Заклучение

Итак, мы попытались ответить на вопрос, что происходит с оптическим вихрем, когда вихревой лазерный пучок, прошедший тонкий слой турбулентной среды, который вносит в него существенные фазовые искажения, распространяется далее в свободном пространстве. Вычисление проведено двумя способами.

1) Ищется функция взаимной когерентности пучка, по этой функции находится средний вектор Умова—Пойнтинга, вводится средний наклон волнового фронта как отношение поперечной компоненты вектора к продольной компоненте.

2) По значениям комплексной амплитуды поля находится локальный волновой вектор (градиент фазы) и по ансамблю случайных реализаций вычисляется его среднее распределение.

Среднее векторное поле (наклонов волнового фронта или локального волнового вектора) может быть представлено в виде вихревой и потенциальной компонент. Вихревой компоненте ставится в соответствие вихревой источник (вектор вихря). Абсолютная величина вихревой компоненты в приосевой области возрастает от нуля по линейному закону (как скорость вращения твердого тела) и после достижения максимального значения убывает обратно пропорционально расстоянию от центра.

Важной характеристикой вихревого поля является его циркуляция по замкнутому контуру. Если

окружать контуром центр пучка, то она увеличивается при росте размера контура и достигает своего предела. Предельное значение циркуляции при первом способе исследования зависит от флуктуаций фазы на экране и дифракционных параметров пучка, а при втором определяется только исходным топологическим зарядом оптического вихря. Вихревые компоненты среднего поля наклонов волнового фронта и локально-волнового вектора убывают при усилении флуктуаций фазы на экране и при возрастании расстояния от экрана. Потенциальная компонента векторного поля средних наклонов волнового фронта определяет эволюцию средней плотности энергии пучка вдоль радиального направления. Она может приводить к фокусировке или дефокусировке пучка «в среднем» в зависимости от дистанции, которую прошел пучок после экрана. Совокупное действие потенциальной и вихревой компонент векторного поля средних наклонов волнового фронта приводит к тому, что картина линий тока средней энергии (средних дифракционных лучей) вихревого пучка, прошедшего турбулентный экран, принимает вид линий тока распадающегося вихревого течения жидкости. Предварительное рассмотрение показывает, что оба способа описания эволюции оптического вихря, связанной с распространением вихревого пучка через турбулентную среду, демонстрируют качественно совпадающие результаты. Количественное сравнение требует более детальных численных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-02-90452-Укр_ф_а.

1. *Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* Singular optics // *Prog. Opt.* 2001. V. 42. P. 219–276.
2. *Siegman A.E.* Lasers. Mill Valleyю Calif.: University Science, 1986. 1308 p.
3. *Young C.Y., Gilchrist Y.V., Macon B.R.* Turbulence induced beam spreading of higher order mode optical waves // *Opt. Eng.* 2002. V. 41. N 5. P. 1097–1103.
4. *Palacios D.M., Rozas D., Swartzlander G.A., Jr.* Observed scattering into a dark optical vortex core // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88. N 10. 103902.
5. *Ponomarenko S.A.* A class of partially coherent beams carrying optical vortices // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 2001. V. 18. N 1. P. 150–156.
6. *Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R., Woerdman J.P.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 45. N 11. P. 8185–8189.
7. *Аксенов В.П., Погуца Ч.Е.* Флуктуации орбитального углового момента лазерного пучка, несущего оптический вихрь, в турбулентной атмосфере // *Квант. электрон.* 2008. Т. 38. № 4. С. 343–348.
8. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
9. *Кандидов В.П.* Метод Монте-Карло в нелинейной статистической оптике // *Успехи физ. наук.* 1996. Т. 166. № 12. С. 1309–1338.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
11. *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика: Пер. с англ. / Под ред. В.В. Самарцева. М.: Наука, Физматлит, 2000. 896 с.
12. *Maleev I.D., Palacios D.M., Marathay A.S., Swartzlander G.A., Jr.* Spatial correlation vortices in partially coherent light: theory // *J. Opt. Soc. Amer. B.* 2004. V. 21. N 11. P. 1895–1900.
13. *Maleev D., Swartzlander G.A., Jr.* Propagation of spatial correlation vortices // *J. Opt. Soc. Amer. B.* 2008. V. 25. N 6. P. 915–922.
14. *Gbur G., Swartzlander G.A., Jr.* Complete transverse representation of a correlation singularity of a partially coherent field // *J. Opt. Soc. Amer. B.* 2008. V. 25. N 9. P. 1422–1429.
15. *Abramochkin E.G., Volostnikov V.G.* Two dimensional phase problem: differential approach // *Opt. Commun.* 1989. V. 74. N 3, 4. P. 139–143.
16. *Аксенов В.П., Измайлов И.В., Поїзнер Б.Н., Тихомирова О.В.* Волновая и лучевая пространственная динамика светового поля при рождении, эволюции и аннигиляции фазовых дислокаций // *Оптика и спектроскопия.* 2002. Т. 92. № 3. С. 465–474.
17. *Vorontsov M., Kolosov V.* Target-in-the-loop beam control: basic considerations for analysis and wave-front sensing // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 2005. V. 22. N 1. P. 126–141.
18. *Swartzlander G.A., Jr., Hernandez-Aranda R.I.* Optical Rankine vortex and anomalous circulation of light // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. N 16. 193901.
19. *Алексеевко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. 504 с.
20. *Аксенов В.П., Погуца Ч.Е.* Пространственная эволюция оптического вихря за случайным фазовым экраном // *Мат-лы XVI Междунар. симпоз. «Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы».* Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2009. С. 159–162.
21. *Лукин В.П., Фортес Б.В.* Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 211 с.
22. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 720 с.

V.P. Aksenov, F.Yu. Kanev, Ch.E. Pogutsa. Spatial coherence, mean tilt of the wave front, and mean local wave-propagation vector of a Laguerre–Gaussian beam passed through a random phase screen.

Investigation has been performed into spatial evolution of energy distribution and local wave-propagation vector of a fluctuating laser beam carrying an optical vortex. In our numerical experiments fluctuations of the beam parameters were due to propagation through a thin (comparing to the whole distance of propagation) atmospheric layer simulated by a phase screen. It was shown that the eddy flow of energy typical for a coherent beam manifests itself in mean characteristics of a vortex beam. Particularly, the mean wave-front tilt can be represented as a sum of vortex and potential components.

Circular motion of optical energy is defined mainly by the rotor of the vector field of wave-front local tilts. For a phase screen with a quadratic structure function of distortions the vortex component corresponds to the model of eddy flow of fluid known as Scully vortex. As the distance increases from the screen to the plane of observations the potential component of the field may result in focusing of the beam. Directions of energy current streamlines (or mean diffraction rays) allow one to find similarity between progressions of an optical vortex carried by a laser beam and destruction of eddy flow of fluid.