

ОПТИКА КЛАСТЕРОВ, АЭРОЗОЛЕЙ И ГИДРОЗОЛЕЙ

УДК 551.593.5

**Крупномасштабная структура и асимптотические закономерности индикатрисы рассеяния света каплями воды в видимом диапазоне**

**Н.П. Романов, С.А. Бородин, С.О. Дубниченко, Л.Д. Новикова\***

*ФГБУ «Научно-производственное объединение «Тайфун»  
249038, г. Обнинск, Калужская обл., ул. Победы, 4*

Поступила в редакцию 15.11.2012 г.

Проведен анализ механизмов рассеяния излучения на шаре в диапазоне углов рассеяния  $\theta$  от 0 до 180° путем сопоставления точных индикатрис, рассчитанных по теории Ми, и интерференционных индикатрис с участием дифракционного и парциальных лучей геометрической оптики (ГО). При этом оказалось, что крупномасштабные осцилляционные закономерности точной индикатрисы при больших Ми параметрах  $x$  соответствуют интерференционной картине двух или трех лучей с уточненными амплитудой дифракционного и сдвигами фаз ГО лучей. Для интегральных характеристик погрешность расчета с использованием интерференционных формул в области углов  $\theta = 0 \div 10^\circ$  не превышает единиц процентов для  $x > 10$  и стремится к нулю с ростом  $x$ . Для остальных областей в зависимости от сочетания четностей целых частей  $\pi$  полного угла рассеяния следует стремление с ростом параметра Ми периодов осцилляций по  $\theta$  к нулю по законам  $x^{-1}$ ,  $x^{-2/3}$  (радуга) и  $x^{-1/2}$ , а период осцилляций по  $x$  начинает зависеть только от  $\theta$ . Результаты расчета средних по интервалам  $\Delta\theta = 10 \div 15^\circ$  индикатрис для показателя  $m = 4/3$  представлены в виде аппроксимационных соотношений с асимптотическим стремлением к индикатрисе ГО.

*Ключевые слова:* индикатриса рассеяния, интерференция, дифракция, геометрическая оптика, теория Ми; phase scattering function, interference, diffraction, geometrical optics, Mie theory.

**Введение**

Характеристики рассеяния света сферическими частицами полностью описываются бесконечными рядами для безразмерного параметра  $x$ , равного отношению длины окружности шара к длине волны падающего излучения, и опубликованы в работах Ми (1908 г.) и Дебая (1909 г.). В современном изложении эти ряды (ряды Ми), которые в дальнейшем будем называть точным решением, приводятся практически во всех известных монографиях [1, 2]. Трудности вычисления используемых в этих рядах функций Риккати–Бесселя первого рода (РБ1) были преодолены в последнее время использованием для них обратной рекуррентной процедуры с инициализацией начальных данных по алгоритму [3], а также предложенному в нашей работе [4] методу вычисления этих функций с использованием цепных дробей и вронскиана функций РБ.

При использовании этих методов и современной вычислительной техники суммирование рядов Ми не представляет особых сложностей и в принципе решает задачу рассеяния света на шарах размерами вплоть до нескольких сантиметров, несмотря на то что

при этом необходимо учитывать число членов ряда порядка  $10^5$ . Однако точное решение, полученное для фиксированных значений параметра  $x$  и угла рассеяния  $\theta$ , слабо информативно для больших значений  $x$  ввиду осцилляционной структуры как угловых, так и размерных зависимостей интенсивности рассеяния.

Проведенное в работе [5] усреднение индикатрисы рассеяния для отдельных углов показало наличие асимптотического стремления средних характеристик с ростом параметра  $x$  к постоянному пределу, что отражает приближение к законам геометрической оптики (ГО). Подобная картина отмечена и в последующих работах [6–8], однако в них, как и в работе [5], вопрос получения количественных зависимостей для индикатрис рассеяния не разрабатывался. Эту ситуацию можно объяснить отсутствием методики расчета индикатрис рассеяния в рамках ГО для парциальных лучей  $p \geq 2$  ( $p$  – количество проходов луча внутри капли).

Такая методика была разработана в нашей работе [9], что позволило ставить задачу о построении количественных закономерностей стремления усредненных индикатрис к предельным индикатрисам ГО. Однако для построения этих закономерностей необходимо представлять качественную картину крупномасштабных особенностей зависимости индикатрисы рассеяния от параметров задачи (угол рассеяния  $\theta$ , параметр  $x$  и показатель преломления  $m$ ). В настоя-

\* Николай Петрович Романов (vernik@typhoon.obninsk.ru); Сергей Александрович Бородин; Светлана Олеговна Дубниченко (svetlanochkad@rambler.ru); Людмила Даниловна Новикова.

шей статье после введения основных определений вначале проводится сопоставление расчетов точной индикатрисы рассеяния и полученной при использовании понятий физической (интерференция, дифракция света) и геометрической оптики. При этом уточняются амплитуда дифракционного луча и сдвиги фаз геометрических лучей при взаимодействии с отражающими поверхностями шара. На основании этих уточненных характеристик выводятся аналитические и аппроксимационные соотношения интерференции рассматриваемых лучей, имеющие место для соответствующих областей углов рассеяния. В результате дается интерпретация имеющихся особенностей угловых характеристик точной индикатрисы. Затем с учетом выявленных параметров осцилляционных структур определяются области усреднения индикатрис по углу рассеяния и по параметру  $x$ . Для этих областей с использованием теории Ми для  $m = 4/3$  рассчитываются интегральные значения индикатрис, которые аппроксимируются аналитическими соотношениями.

## 1. Основные определения и общая схема исследования индикатрис

Рассмотрим рассеяние света, представляющее собой плоскую электромагнитную волну с плотностью потока энергии  $I_0$ , падающую на сферическую частицу радиуса  $r$ . Индикатриса рассеяния  $\gamma$  определяется как отношение потока энергии  $dW$ , рассеянной в пространственный угол  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ , к величине этого угла и потоку энергии, падающей на поперечное сечение частицы:

$$\gamma(m, r, \theta, \phi) = \frac{dW}{d\Omega} \frac{1}{I_0 \pi r^2}. \quad (1)$$

Проинтегрированная по азимутальному углу индикатриса, которая и будет предметом рассмотрения в настоящей статье, определяется суммой поляризационных индикатрис  $\gamma_k$ , где  $k = 1$  и  $2$  соответствуют перпендикулярной и параллельной поляризациям:

$$\gamma(m, r, \theta) = \gamma_1(m, r, \theta) + \gamma_2(m, r, \theta). \quad (2)$$

Для теории Ми соответствующее соотношение записывается в виде

$$\gamma_{\text{Ми}}(m, x, \theta) = \frac{i_1(m, x, \theta)}{x^2} + \frac{i_2(m, x, \theta)}{x^2}. \quad (3)$$

Здесь величины  $i_k$  зависят от размера частиц через параметр  $x$  и выражаются рядами Ми по парциальным гармоникам с номерами  $l$ . Поскольку выражения для этих рядов имеются в [1, 2], то здесь они не приводятся. Отметим только, что алгоритмы вычисления рядов Ми изложены и в нашей работе [10].

В рамках ГО индикатриса  $\gamma_{\text{ГО}}$  не зависит от размера частиц и также представляет собой сумму двух поляризационных индикатрис  $\gamma_{\text{ГО},k}$ , которые

в свою очередь являются суммой парциальных индикатрис  $\gamma_{p,k}$ :

$$\gamma_{\text{ГО},k} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \gamma_{p,k}(m, \theta). \quad (4)$$

Интеграл индикатрисы по полному углу рассеяния, равный отношению рассеянной энергии к падающей на поперечное сечение, называется фактором эффективности рассеяния и определяется выражением

$$K_{\text{рас}}(m, x) = \int_0^\pi \gamma(m, x, \theta) \sin(\theta) d\theta. \quad (5)$$

Для случая геометрической оптики фактор эффективности рассеяния для непоглощающих частиц равен точно единице. Интеграл индикатрисы  $G(\theta_n, \theta_k, m, x)$  по частичному интервалу углов рассеяния от  $\theta_n$  до  $\theta_k$  определяется соотношением

$$G(\theta_n, \theta_k, m, x) = \int_{\theta_n}^{\theta_k} \gamma(m, x, \theta) \sin(\theta) d\theta. \quad (6)$$

Ввиду сложности изображения греческого символа  $\gamma$  на рисунках для обозначения индикатрис в данной работе будет параллельно использоваться латинская буква  $g$ , при этом смысл данной замены должен быть ясен из контекста.

На схеме рассеяния в представлениях геометрической оптики (рис. 1) изображены только парциальные лучи  $p = 0, 1$  и дифракционный луч  $p_d$ .

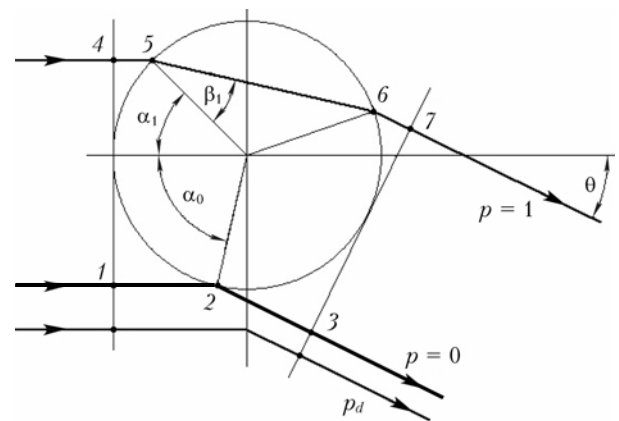


Рис. 1. Схема рассеяния света на шаре. Углы падения  $\alpha$  и преломления  $\beta$  связаны соотношением  $\sin\alpha = m\sin\beta$ . Точками с номерами обозначены точки пересечения лучей  $p = 0$  и  $1$  с плоскостью падения  $1-4$ , поверхностью шара и плоскостью рассеяния  $3-7$

Связь между углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и полным углом рассеяния  $\Theta_p$  записывается в виде [9]:

$$\Theta_p = p(\pi - 2\beta_p) + 2\alpha_p - \pi. \quad (7)$$

Используемый в (7) угол рассеяния выходит за границы диапазона  $0-180^\circ$ , в котором определяется индикатриса рассеяния. Получение приведенных

в этот диапазон величин угла рассеяния  $\theta_p$  в [9] сводилось к использованию процедуры  $\theta = \arccos(\cos\Theta)$ . Однако такой способ не позволяет получать аналитические соотношения для разности фаз, определяющей интерференционные эффекты. В данной работе для этой процедуры применяется приведенное соотношение (7а), в котором используется величина  $k_p = [\Theta_p/\pi]$ , равная наибольшему целому числу, не превосходящему величину в квадратных скобках [11]:

$$\theta_p = \begin{cases} (1+k_p)\pi - \Theta_p, & k_p - \text{нечетное,} \\ \Theta_p - k_p\pi, & k_p - \text{четное.} \end{cases} \quad (7a)$$

Отметим, что используемая в компьютерах программа для отрицательных чисел завывает получаемую величину  $k_p$  на единицу.

Для понимания общей картины особенностей поведения точной индикатрисы на рис. 2 представлены точная, полная и парциальные ГО индикатрисы. Точная индикатриса для  $x = 2 \cdot 10^3$ , представленная на рис. 2, а, была рассчитана с шагом 0,01°, который примерно в 20 раз меньше самых малых осцилляционных периодов, определяемых вкладом последних значимых членов ряда Ми. Отметим, что при расчетах с большим шагом возникают эффекты появления ложных перемежающихся структур. Выбор величины  $x$  определялся желанием показать на

одной диаграмме более подробно осцилляционную структуру при выявлении ее асимптотических закономерностей.

Как видно из рис. 2, точная индикатриса представляет собой осцилляционную структуру с разнообразными периодами и величинами амплитуд. Объяснение механизма и получение аналитических закономерностей этих особенностей и являются одними из целей данной работы. Для этого на рис. 2, б представлены парциальные индикатрисы ГО, значения  $p$  которых соответствуют номерам кривых. Стрелки на них указывают направление изменения угла  $\theta$  при увеличении угла падения  $\alpha$ . Для парциальных индикатрис с  $p \geq 2$  вводится понятие нижней  $n$  и верхней  $v$  ветвей, расшифровка которых понятна из обозначений для  $p = 2$  и 3.

Из рис. 2 также видно, что весь диапазон углов можно разделить на шесть областей. Первая область (область  $d$ ) характеризуется заметным вкладом дифракционного луча и занимает для  $x = 2 \cdot 10^3$  диапазон углов  $\theta$  от 0 до  $\theta_{d,gr} \approx 10^\circ$ . Имея в виду, что луч  $p = 0$  присутствует во всем диапазоне углов рассеяния, следующие расположенные в порядке возрастания  $\theta$  области углов будем просто называть областями  $p1, p3$ , радуги 3, радуги 2 и  $p2$ . Границы этих областей отмечены на рис. 2, а и определяются положением углов радуг  $\theta_{p,r}$  и граничных углов  $\theta_{p,b}$ , соответствующих граничному значению угла  $\alpha = \pi/2$ .

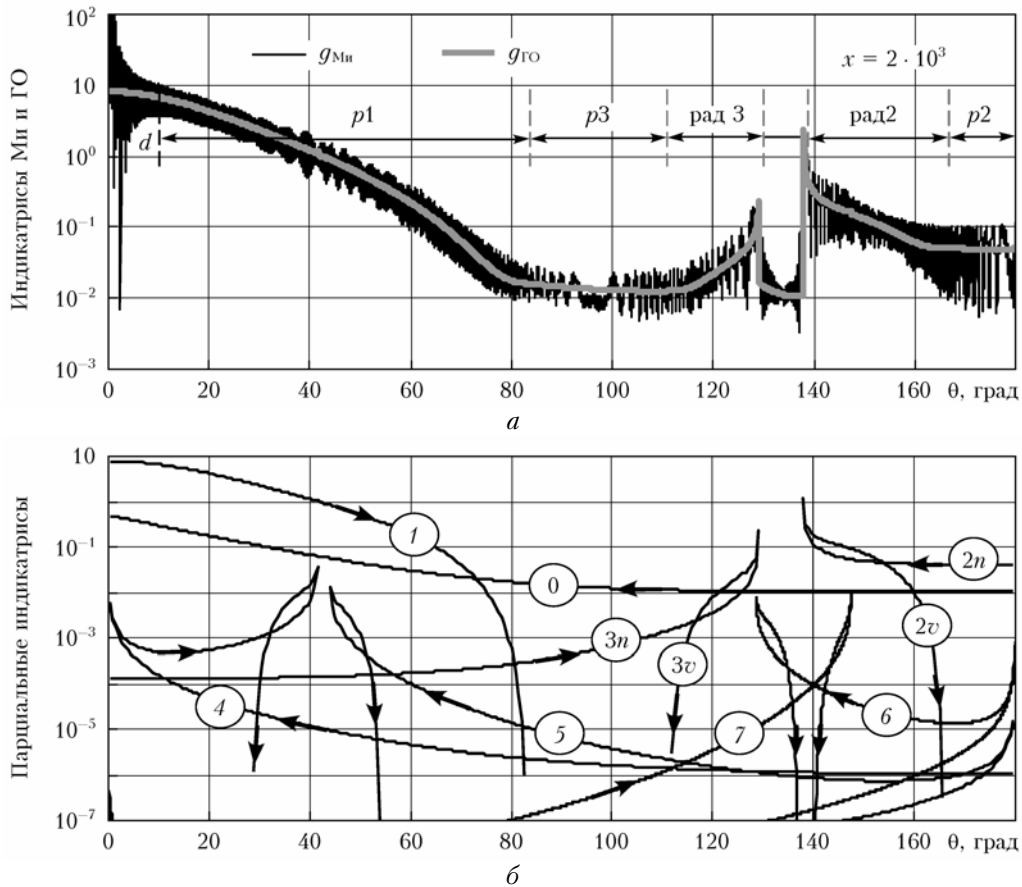


Рис. 2. Точная и геометрическая индикатрисы для  $m = 4/3$ : а – индикатриса Ми и полная индикатриса ГО; б – парциальные индикатрисы ГО – номера кривых соответствуют значениям  $p$

Таблица 1

Значения характерных углов парциальных индикатрис для  $m = 4/3$ 

Характерные углы, град	$p$						
	1	2	3	4	5	6	7
$\theta_{p,r}$	—	137,970	129,022	41,615	43,860	128,420	147,530
$\theta_{p,b}$	82,819	165,638	111,542	28,723	54,096	136,915	140,265

Расположенная между  $\theta_{3,r}$  и  $\theta_{2,r}$  узкая область с одним только парциальным лучом  $p = 0$  отдельно не рассматривается. Соотношения для углов радуг общеизвестны, и последняя их упрощенная форма приводится в [12]. Для того чтобы в дальнейшем представлять значения границ вышеуказанных областей, в табл. 1 приводятся значения  $\theta_{p,r}$  и  $\theta_{p,b}$ .

Из осцилляционного характера точной индикатрисы при плавном характере полной индикатрисы ГО можно сделать вывод о возможности описать характер первой, учитывая интерференцию парциальных лучей. Получению необходимых для этого соотношений посвящается следующий раздел.

## 2. Формулы расчета амплитуд и фаз интерферирующих лучей

При сложении нескольких распространяющихся в одном направлении плоских волн с одной и той же частотой, но с разными амплитудами  $a$  и фазами  $\varphi$  образуется суммарная волна той же частоты с результирующей амплитудой [13], определяемой соотношениями, которые ниже приводятся для случая трех волн:

$$g_{ijk} = a_{ijk}^2 = a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 + 2a_i a_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + 2a_j a_k \cos(\varphi_j - \varphi_k) + 2a_i a_k \cos(\varphi_i - \varphi_k). \quad (8)$$

В выражении (8) интерференционная индикатриса  $g$  отождествляется с квадратом соответствующей амплитуды. Алгоритм перехода к произвольному количеству волн понятен из самого вида этих соотношений. Для электромагнитных волн явление интерференции имеет место только для волн одинаковой поляризации. Суммарная интерференционная индикатриса получается путем простого сложения двух поляризационных индикатрис согласно соотношению (2). Условие экстремумов двухлучевой индикатрисы  $g_{i,j}$  с использованием обозначения  $\Delta\varphi_{i,j} = \varphi_j - \varphi_i$  записывается в виде

$$\cos\Delta\varphi_{i,j} = \pm 1. \quad (8a)$$

Здесь знаки плюс и минус эквивалентны четному или нечетному значению  $\Delta\varphi_{i,j}/\pi$  и означают максимум и минимум амплитуды соответственно. Амплитуды в экстремумах равны

$$\max g_{i,j} = (a_j + a_i)^2; \quad \min g_{i,j} = (a_j - a_i)^2. \quad (8b)$$

Среднее по периоду значение индикатрисы и размах ее амплитуд определяются следующими соотношениями:

$$\bar{g}_{i,j} = (a_j^2 + a_i^2); \quad (\max g_{i,j} - \min g_{i,j}) = 4a_i a_j. \quad (8b)$$

### 2.1. Амплитуды и фазы парциальных лучей $p = 0, 1$ и дифракционного луча

Набег фазы  $p$ -го луча  $\varphi_p$  от плоскости, перпендикулярной направлению падения (плоскости 1–4, см. рис. 1), до плоскости, перпендикулярной направлению рассеяния (плоскости 3–7), определяется умножением на величину  $2\pi/\lambda$  оптическим путем между этими плоскостями для соответствующего луча. Из геометрических построений получаем

$$\varphi_p(m, x, \alpha) = 2x(1 - \cos\alpha_p + mp\cos\beta_p) + d\varphi_p. \quad (9)$$

Здесь  $d\varphi_p$  означает сдвиг фазы, обусловленный взаимодействием с поверхностью. Их значения были получены путем подбора при сопоставлении точных и интерференционных индикатрис при больших параметрах  $M$  и для рассматриваемых в данной работе лучей  $p \leq 5$  имеют следующий вид:

$$d\varphi_0 = d\varphi_1 = d\varphi_{2n} = \pi/2; \quad d\varphi_{3n} = 3\pi/2; \quad (10a)$$

$$d\varphi_{4n} = \pi; \quad d\varphi_{5n} = 0,$$

$$d\varphi_{pv} = d\varphi_{pn} - f_p(\theta - \theta_{p,r})\pi/2. \quad (10b)$$

Введенная в (10b) функция  $f_p$  равна единице в нуле и стремится к нулю на бесконечности.

Для построения интерференционной картины необходимо складывать лучи с одинаковым углом рассеяния  $\theta$ . Поскольку соотношения как для фаз, так и для парциальных амплитуд выражаются в виде функций от угла падения  $\alpha$  (и связанного с ним однозначной связью угла  $\beta$ ), необходимо знать зависимость  $\alpha(\theta)$ . Для  $p = 0$  и 1 такая аналитическая зависимость существует и при введении промежуточного параметра  $q = \cos(\theta/2)$  выражение (9) с использованием соотношений (10a) принимает вид

$$\varphi_0 = 2x(1 - \sqrt{1 - q^2}) + \pi/2, \quad (11a)$$

$$\varphi_1 = 2x(1 + \sqrt{m^2 - 2mq + 1}) + \pi/2. \quad (11b)$$

Набег фазы дифракционного луча

$$\varphi_d = 2x. \quad (11b)$$

Аналитические зависимости для амплитуд  $a_0$  и  $a_1$  получаются путем извлечения квадратного корня из соответствующих парциальных индикатрис, аналитические выражения для которых приводятся в работе [9], и записываются в виде

$$a_{0,1}(\theta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{m^2 - q^2} - \sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{m^2 - q^2} + \sqrt{1 - q^2}} \right],$$

$$a_{0,2}(\theta) = \text{abs} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{m^2 - q^2} - m^2 \sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{m^2 - q^2} + m^2 \sqrt{1 - q^2}} \right] \right\},$$

$$0 \leq \theta \leq \pi; \quad (12a)$$

$$a_{1,1}(\theta) = \left( \frac{2m}{m^2 - 1} \right)^2 \frac{\sqrt{(mq - 1)^3 (m - q)^3}}{2(m^2 - 2mq + 1)\sqrt{q}},$$

$$a_{1,2}(\theta) = \frac{a_{1,1}}{q^2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\arccos(1/m). \quad (12б)$$

Для амплитуды  $a_d$  мы используем выражение, которое было подобрано по условию лучшего соглашения интерференционной и точной индикатрис вблизи  $\theta = 0$  и отличается от использовавшегося в [5] множителя  $x$  введением величины  $x_d$ :

$$a_{d,1} = a_{d,2} = a_d = x_d \frac{J_1(x_d \theta)}{(x_d \theta)}, \quad (12в)$$

где

$$x_d = \begin{cases} x + x^{1/3} \left( 1 - \frac{x\theta}{j_{1,1}} \right) & \text{при } x\theta < j_{1,1}, \\ x & \text{при } x\theta \geq j_{1,1}. \end{cases} \quad (12г)$$

Здесь  $j_{1,1} = 3,832$  – первый нуль функции Бесселя  $J_1(x)$ . Для угловой зависимости  $a_d$  вместо  $\sin \theta$  в [5] используется величина  $\theta$ , что соответствует угловым зависимостям в рядах Ми [1].

Приведенные выше аналитические соотношения (8)–(12) позволяют проводить непосредственное вычисление интерференционных индикатрис  $g_{d,0,1}$ ,  $g_{0,1}$  и  $g_{d,1}$ , которые и могут описывать индикатрису рассеяния в передней полусфере. Эти же соотношения можно использовать для анализа свойств интерференционных индикатрис. В частности, амплитуды осцилляций и их размах для индикатрисы  $g_{0,1}$  определяются подстановкой величин (12а) и (12б) в выражения (8б) или (8в). Для определения положения экстремумов осцилляционной структуры этой же индикатрисы необходимо совместное решение уравнений (8а) и (11а), (11б), которое в аналитическом виде не выражается. Для получения приближенных решений запишем условие (8а) для периода осцилляций по углу  $\Delta\theta$  и по параметру Ми  $\Delta x$  с использованием первых производных

$$\Delta\theta_{i,j} \frac{d\Delta\varphi_{i,j}}{d\theta} = 2\pi; \quad \Delta x_{i,j} \frac{d\Delta\varphi_{i,j}}{dx} = 2\pi. \quad (13)$$

Выражения для отдельных производных приводятся ниже:

$$\frac{d\Delta\varphi_{0,1}}{d\theta} = x \left( q + m \sqrt{\frac{1 - q^2}{m^2 + 1 - 2mq}} \right) = x(1 + 1,85), \quad (13a)$$

$$\frac{d\Delta\varphi_{0,1}}{dx} = 2 \left( \sqrt{1 - q^2} + \sqrt{m^2 - 2mq + 1} \right), \quad (13б)$$

$$\frac{d\Delta\varphi_{d,1}}{dx} = 2\sqrt{m^2 - 2mq + 1}. \quad (13в)$$

Числа в последней скобке (13а) отражают диапазон изменения при  $m = 4/3$  для углов  $\theta$  от нуля до  $\theta_{1,b}$ .

Из соотношений (13) и (13а) следует, что период осцилляционной структуры  $g_{0,1}$  по углу  $\theta$  стремится к нулю с ростом параметра Ми по закону  $x^{-1}$ . Из соотношений (13), (13б) и (13в) видно, что периоды осцилляций  $\Delta x_{0,1}$  и  $\Delta x_{d,1}$  не зависят от  $x$ . Эта независимость имеет место для всех интерференционных индикатрис ввиду линейной зависимости от  $x$  согласно соотношениям (9), (11в) сдвига фаз для всех рассматриваемых лучей.

## 2.2. Аналитические и аппроксимационные закономерности для интерференции лучей $p \geq 2$

Для лучей  $p \geq 2$  из-за отсутствия аналитических зависимостей  $\alpha(\theta)$  необходимо использовать имеющиеся в [9] записи для парциальных индикатрис в виде функции от угла  $\alpha$  и описанную там процедуру определения углов  $\alpha$  по заданным значениям  $\theta$ . Однако для разности фаз в отдельных случаях аналитические соотношения могут иметь место. Для их выяснения используем выражения для производных по углу  $\Theta$  для  $\varphi_p(\alpha)$ , полученные с использованием формул для производных обратных функций  $\alpha(\theta)$ , приведенных в [9]. Для первой производной:

$$\frac{d\varphi_p}{d\Theta} = x \sin \alpha_p. \quad (14)$$

Принимая во внимание формулу (7а) приведения углов, получаем, что первые производные по приведенному углу  $\varphi_p^{(1)}$  совпадают с производными по полному углу при четных значениях  $k_p$  и имеют противоположный знак при нечетных. Это обстоятельство можно записать:

$$\frac{d\varphi_p}{d\Theta} = \begin{cases} -\varphi_p^{(1)}, & k_p - \text{нечетное}, \\ \varphi_p^{(1)}, & k_p - \text{четное}. \end{cases} \quad (14a)$$

Вторые производные по приведенному углу  $\varphi_p^{(2)}$  совпадают по величине и знаку с соответствующими величинами по полному углу во всех ситуациях:

$$\frac{d^2\varphi_p}{d\Theta^2} = \varphi_p^{(2)} = \frac{x \cos \alpha_p}{2} \left( 1 - \frac{p \cos \alpha_p}{\sqrt{m^2 - \sin^2 \alpha_p}} \right)^{-1}. \quad (14б)$$

Из соотношений (14) и (14а) следует равенство первой производной по приведенному углу для всех одинаковых  $\alpha_p$  при одинаковой четности. Отсюда следует вывод, что производная разности фаз двух лучей с одинаковым углом рассеяния становится равной нулю при условии совпадения углов падения, которое для интерференции лучей  $p_i = i$  и  $p_j = j$  имеет вид

$$d(\Delta\varphi_{i,j})/d\theta = 0 \quad \text{при } \alpha_i = \alpha_j = \alpha_{i,j}; \quad \theta_i = \theta_j = \theta_{i,j}$$

и одинаковой четности  $k_i$  и  $k_j$ . (15)

Это условие означает, что при его выполнении разность фаз имеет экстремум, что соответствует стационарной разности фаз. С использованием выражения (7а) получаем, что условие (15) выполняется для углов преломления  $\beta$ , определяемых соотношением

$$\beta_{i,j} = \frac{(p_j - p_i) - (k_j - k_i)}{2(p_j - p_i)} \pi \leq \arcsin\left(\frac{1}{m}\right),$$

одинаковая четность  $k_i$  и  $k_j$ . (15а)

Для лучей с разной четностью величины  $k_p$  условие  $d(\Delta\Phi_{i,j})/d\theta = 0$  может быть выполнено только при  $\alpha_i = \alpha_j = 0$ , что приводит к соотношению

$$(p_i + p_j - k_i - k_j - 3) = 0; \quad \alpha_i = \alpha_j = 0;$$

$$\theta_i = \theta_j = \theta_{i,j}; \quad \text{разная четность } k_i \text{ и } k_j. \quad (15б)$$

В определенной из условий (15) точке выражение для разности фаз с использованием (9), (10) принимает вид

$$\Delta\Phi_{i,j}(\theta_{i,j}) = 2m(p_j - p_i)x \cos\beta_{i,j} + (d\phi_j - d\phi_i). \quad (16)$$

Разложение разности фаз в ряд Тейлора в точке  $\theta_{i,j}$  принимает вид

$$\Delta\Phi_{i,j}(\theta_{i,j} - \theta) =$$

$$= \Delta\Phi_{i,j}(\theta_{0,p}) + \frac{1}{2}\Delta\Phi_{i,j}^{(2)}(\alpha_{i,j})(\theta_{i,j} - \theta)^2 + \dots, \quad (17)$$

а отстояние минимумов результирующей амплитуды с номером  $K$  от угла  $\theta_{i,j}$

$$\theta_{i,j} - \theta_{i,j,K}^{\min} = \pm \sqrt{\frac{(2K-1)\pi - \Delta\Phi_{i,j}(\beta_{i,j})}{\Delta\Phi_{i,j}^{(2)}(\alpha_{i,j})/2}}. \quad (18)$$

В выражении (18) и последующих формулах (19а) и (22) должна использоваться величина  $\Delta\Phi$ , представляющая собой преобразованную к диапазону  $0-\pi$  величину  $\Delta\phi$ .

Для нашего случая, как следует из рис. 2, интерес представляет комбинация парциального луча  $p = 0$  ( $k = -1$ ) с нижними ветвями лучей  $p = 2$  ( $k = 0$ ) и  $p = 3$  ( $k = 1$ ).

Для первого случая условия (15б) и значения соответствующих членов разложения (16)–(18) при использовании соотношений (10а), (14) равны

$$\alpha_{0,2} = \beta_{0,2} = 0; \quad \theta_{0,2} = \pi; \quad \Delta\Phi_{0,2n}(\pi) = 4mx;$$

$$\frac{\Delta\Phi_{0,2}^{(2)}(\alpha_{0,2})}{2} = \frac{x}{2(2-m)}. \quad (19)$$

Для ясности изложения запишем соотношения для положения минимумов и осцилляционного периода  $\Delta x$  индикатрисы  $g_{0,1}$  в явном виде, получающиеся после подстановки в (13а) и (18) выражений для соответствующих величин из (19):

$$\theta_{0,2n,K}^{\min} = \pi - \sqrt{2(2-m)} \sqrt{\frac{(2K-1)\pi - \Delta\Phi_{0,2n}(\pi)}{x}}, \quad (19а)$$

$$\Delta x_{0,1}(\pi) = \frac{\pi}{2m}. \quad (19б)$$

Для комбинации  $p = 0$  и 3 соответствующие выражения приобретают вид

$$\beta_{0,3} = \frac{\pi}{6}; \quad \sin\alpha_{0,3} = \frac{m}{2}; \quad \theta_{0,3} = \pi - 2\alpha_{0,3};$$

$$\Delta\Phi_{0,3}(\theta_{0,3}) = 3\sqrt{3}mx - \pi. \quad (20)$$

Значения  $\theta_{0,3}$  для  $m = 1,33$ ;  $4/3$  и  $1,34$  равны  $96,64$ ;  $96,38$  и  $95,87^\circ$  соответственно.

Для  $\Delta x$  в точке стационарной разности фаз лучей  $p = 0$  и 3 имеет место следующее соотношение:

$$\Delta x_{0,3}(\theta_{0,3}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}m}. \quad (20а)$$

Получаем выражение для второй производной разности  $\Delta\Phi_{0,3}$  в точке  $\alpha_{0,3}$ :

$$\frac{\Delta\Phi_{0,3}^{(2)}(\theta_{0,3})}{2} = x \left[ \frac{\sqrt{4-m^2}}{8} - \frac{m\sqrt{4-m^2}}{8(m-\sqrt{12-3m^2})} \right]. \quad (21)$$

Здесь первая и вторая дроби в правой части соответствуют  $p = 0$  и 3 соответственно. Ввиду сложности выражения (21) для восприятия масштабов осцилляционной картины выпишем для  $m = 4/3$  выражение для минимумов индикатрисы  $g_{0,3n}$  в окрестности угла  $\theta_{0,3}$  с подстановкой численного значения выражения (21):

$$\theta_{0,3n,K}^{\min}(m = 4/3) =$$

$$= \theta_{0,3} \pm 1,611 \sqrt{\frac{(2K-1)\pi - \Delta\Phi_{0,3}(\theta_{0,3})}{x}}. \quad (22)$$

Из соотношений (18), (19а) и (22) видно, что расстояние между минимумами интерференционной структуры лучей  $p = 0$  с лучами  $p = 2$  и 3 стремится к нулю по закону  $x^{-1/2}$  при возрастании параметра  $M$ , что качественно отличается от полученного выше закона  $x^{-1}$  для интерференции лучей  $p = 0$  и 1. С точки зрения проведенного в этом разделе исследования эта ситуация объясняется разной комбинацией четностей величины  $k_p$ .

Положение экстремумов основной осцилляционной структуры радуг, определяемое интерференцией между верхней и нижней ветвями соответствующих парциальных лучей, хорошо известно и определяется следующими соотношениями [14]:

$$\theta_{p,K}^{\min} = \theta_{p,r} + (-1)^p \left(\frac{9h_p}{16}\right)^{1/3} \left(\frac{(2K-1/2)\pi}{x}\right)^{2/3}, \quad (23)$$

где

$$h_p(m) = \frac{(p^2-1)^2}{p^2(m^2-1)} \sqrt{\frac{p^2-m^2}{m^2-1}}. \quad (23а)$$

Из соотношения (23) следует стремление периода осцилляций основной осцилляционной структуры радуг к нулю с ростом параметра  $x$  по закону  $x^{-2/3}$ .

### 3. Результаты сопоставления интерференционных и точных индикатрис

Используемая процедура вычисления точных индикатрис, которые далее будут обозначаться просто как  $\gamma$ , основанная на вычислении рядов Ми по парциальным гармоникам с индексом  $l$ , описана нами в работах [4, 10]. Отличительной особенностью этой процедуры является использование для действительных показателей преломления комбинации прямой и обратной рекурсии для вычисления функций РБ1, входящих в радиальные коэффициенты рядов. Угловые функции  $\pi_l(\theta)$  и  $\tau_l(\theta)$  вычисляются методом прямой рекурсии. Все результаты вычислений по рядам Ми проводятся с учетом резонансов с полушириной не менее 0,01, что обеспечивается ограничением суммы членов рядов по этому критерию. Аппроксимационная формула для граничного значения номера члена ряда  $L_b$  при этом условии для  $m = 4/3$  имеет вид

$$L_b = x + 0,8x^{1/3} + 4. \quad (24)$$

Вклад резонансов с полушириной менее 0,01 в интегральные характеристики незначителен, но их рассмотрение важно для экспериментов с монохроматическим излучением.

Для сопоставления угловых зависимостей значения параметра Ми выбирались, в основном, в точках отсутствия резонансов с тем, чтобы четче выявлять общие закономерности, описываемые в рамках физической оптики. Для области  $x$  в районе  $10^2$ ,  $10^3$  и  $10^4$  такими точками являются  $x = 105,7$ ; 999,75 и 9999,31 соответственно. Основные результаты сопоставлений (кроме отдельно указанных случаев) проводятся для  $m = 4/3$ .

#### 3.1. Дифракционная область

Пример сопоставления точной  $g_{\text{Ми}}$  с интерференционными индикатрисами для трех- и двухпарциальных лучей  $g_{d,0,1}$  и  $g_{0,1}$ , а также индикатриса с участием только одного дифракционного луча  $g_d$  приводятся на рис. 3.

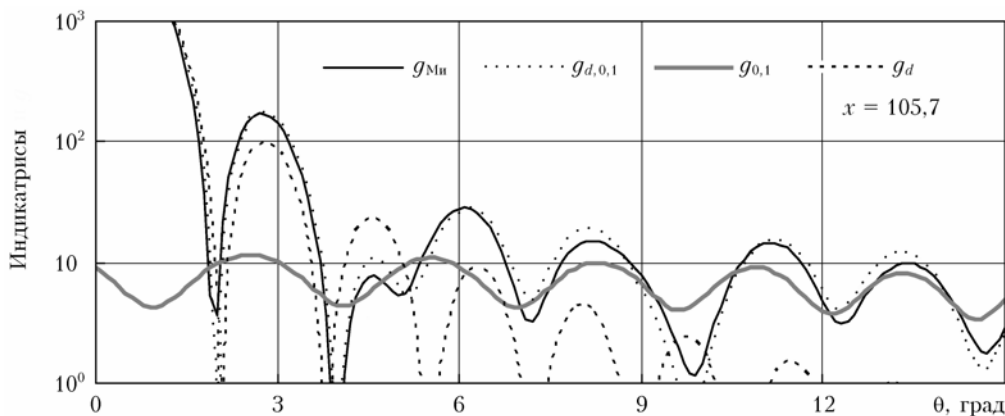


Рис. 3. Сравнение точной и интерференционных индикатрис для дифракционной области ( $m = 4/3$ )

Видно, что положение минимумов точной и интерференционной  $g_{d,0,1}$  индикатрис соответствуют друг другу. При этом их положение может как совпадать, так и не совпадать с нулями амплитуды  $a_d$ . Кроме того, для амплитуд этих индикатрис имеет место только качественное соответствие. Как следует из расчетов при других параметрах  $x$ , влияние дифракционного члена исчезает при угле  $\theta_d$ , который можно считать границей дифракционной области и для которого имеет место оценочное соотношение, справедливое для  $x \geq 6$ :

$$\theta_d \approx 100^\circ/x^{1/3}. \quad (25)$$

Для количественного сопоставления было использовано сравнение средних по резонансным интервалам  $\delta x$  значений частичных интегралов (6), определяемых формулой

$$\bar{G}_i(\theta_n, \theta_k) = \frac{1}{\delta x} \int_{x_i - \delta x/2}^{x_i + \delta x/2} G(\theta_n, \theta_k, x) dx. \quad (26)$$

Средние значения резонансных интервалов  $x_i$  для  $m = 4/3$  описываются приведенным в [10] соотношением, которое дублируется ниже:

$$x_i = 5,09 + 0,82i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Результаты такого сопоставления иллюстрируются кривыми рис. 4, где для  $\theta_n = 0$  и четырех значений  $\theta_k$  представлены зависимости относительной разности этих величин от  $\langle x \rangle = x_i$ . Кроме того, из рис. 4 видно, что относительная разность имеет осциллирующий характер вблизи нулевой линии с уменьшающейся амплитудой по мере роста величины  $\langle x \rangle$ . При этом в районе  $\langle x \rangle \approx 10$  амплитуда колебаний не превышает 7%. Естественно, что при усреднении по достаточно широким распределениям частиц по размерам и облучающего света по длинам волн осцилляционные колебания сгладятся.

В результате вышеизложенного мы приходим к очень важному выводу, что интерференционная индикатриса  $g_{d,0,1}(\theta)$ , определяемая выражениями (8)–(12), может быть использована для получения характеристик рассеяния облачных сред в диапазоне углов от 0 до  $10^\circ$ .

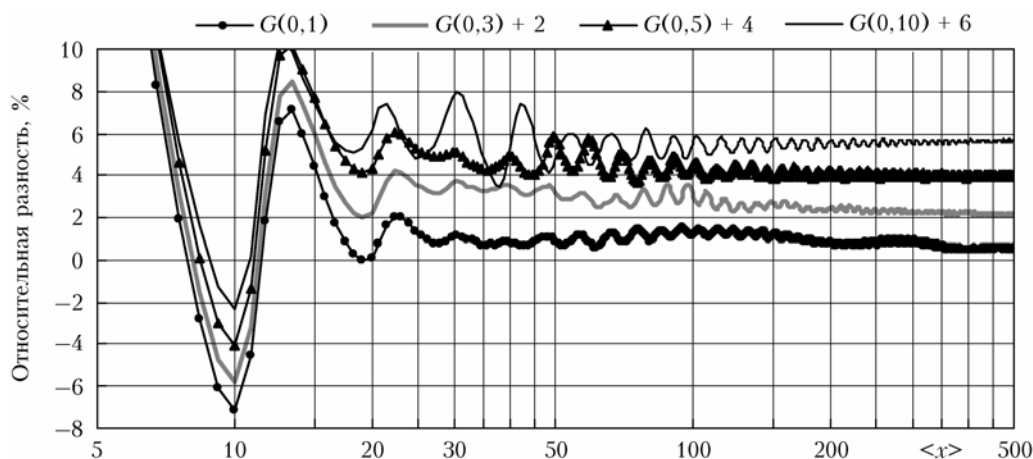


Рис. 4. Зависимость относительной разности  $(\bar{G}_i(\text{Ми}) - \bar{G}_i(d, 0, 1)) / \bar{G}_i(\text{Ми})$  индикатрис от  $\langle x \rangle$  для значений  $\theta_n = 0$  и  $\theta_k = 1, 3, 5$  и  $10^\circ$ . Последние смещены по оси ординат на 2, 4 и 6% соответственно

### 3.2. Область $p1$

Сопоставление индикатрисы  $g_{0,1}$ , осцилляционные периоды которой описываются соотношениями (13), с точной индикатрисой показывает хорошее их совпадение по положению минимумов уже начиная с  $x \approx 10$  (здесь не иллюстрируется). Однако по амплитудам наблюдается только качественное согласие. Последнее обстоятельство объясняется влиянием радуг 4 и 5, которое для больших параметров  $x$  проявляется в модуляции амплитуды интерференционной индикатрисы  $g_{0,1}$ . Эта ситуация иллюстрируется кривыми рис. 5, данные которого для возможности различения кривых умножаются на множители  $10^n$ . Кривые для  $m = 1,34$  приводятся для уточнения связи механизма модуляции с параметрами радуг. Затемненные области на этом рисунке обусловлены

осцилляционной структурой индикатрисы рассеяния, не разрешаемой при параметрах рис. 5.

Кроме того, при  $x = 10^3$  на фоне основной начинает проявляться дополнительная осцилляционная структура, которая для  $x \approx 10^4$  превращается в систему пульсационных биений для области радуги луча  $p = 4$  и синусоидальной модуляции для области радуги луча  $p = 5$ . Отметим, что для  $m = 4/3$  четкая граница между радугами отсутствует ввиду небольшого промежутка между ними. Более четкая картина разделения радуг 4 и 5 проявляется при  $m = 1,34$ . Сопоставление представленных для этого случая положения первых пяти минимумов, рассчитанных по соотношению (23), с периодами пульсаций индикатрисы свидетельствует о качественном их согласии для радуги 4. Для радуги 5 это соотношение

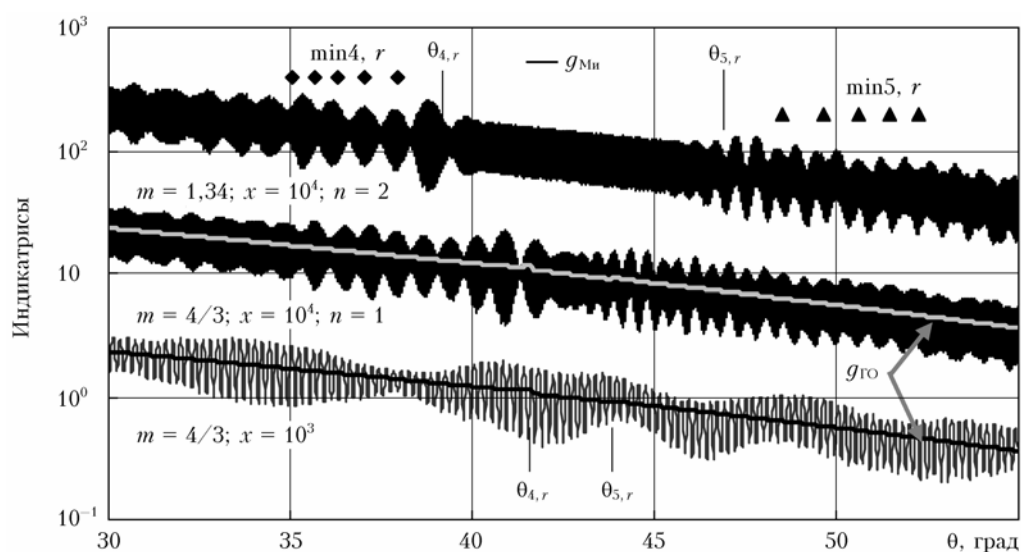


Рис. 5. Угловая зависимость индикатрис в области луча  $p1$ : вертикальные отрезки соответствуют положениям радуг  $\theta_{4,r}$  и  $\theta_{5,r}$ , равных  $41,62$  и  $43,86^\circ$  для  $m = 4/3$  и  $39,19$  и  $46,96^\circ$  для  $m = 1,34$  соответственно. Ромбы и треугольники – положение первых 5 минимумов радуг  $p = 4$  и  $5$  для  $m = 1,34$ , рассчитанных по соотношениям (23)



дает период приблизительно в 2 раза больше наблюдаемого. Это обстоятельство можно объяснить различием четности лучей  $p = 4$  и  $5$ , для которых величины  $k$  в районе радуг равны 1 и 2 соответственно.

Численные расчеты интерференционных индикатрис с участием четырех лучей ( $g_{0,1,4nv}$  и  $g_{0,1,5nv}$ ) позволили получить приведенные в (10а) сдвиги фаз для  $p = 4$  и  $5$ , при которых качественно подтверждаются указанные выше особенности. Более детальным механизмом их формирования в данной работе мы заниматься не будем. Отметим только, что влияние радуг 4 и 5 проявляется в модуляции осцилляционной структуры индикатрисы  $g_{0,1}$  без заметного влияния на ее средние значения. Именно этим обстоятельством можно объяснить тот факт, что проявление радуги 4 в природе оказалось возможным обнаружить в работе [15] только после специальной обработки фотоснимков.

### 3.3. Область $p3$

Сопоставление точной и интерференционной  $g_{0,3n}$  индикатрис для области луча  $p3$  представлено на рис. 6, на котором нанесены также рассчитанные по соотношению (22) минимумы с порядковыми номерами  $K = 1, 2$  и т.д. Точки справа от угла  $\theta_{0,3}$ , отмеченного вертикальной стрелкой, соответствуют знаку плюс, а точки слева — знаку минус в (22).

Из этого рисунка видно, что интерференционная индикатриса хорошо соответствует средним значениям точной, на которой проявляются дополнительные осцилляции меньшей амплитуды с периодом, примерно равным  $\pi/x$ . Относительный вклад таких осцилляций уменьшается с ростом параметра  $x$ , что и наблюдается для  $x = 2 \cdot 10^3$  на рис. 2, а. Отметим хорошее совпадение аппроксимационных минимумов, описываемых соотношением (22).

Сопоставления индикатрис для области радуги 3 в настоящей статье не проводится, поскольку результаты в этой области аналогичны таковым для радуги 2, которые рассматриваются ниже.

### 3.4. Области радуги 2 и $p2$

Данные сопоставления интерференционной и точной индикатрис для  $x \approx 10^4$  для области радуги 3 и луча  $p2$  приводятся на рис. 7. При этом на рисунке совместно с точной представлены трехлучевая интерференционная индикатриса  $g_{0,2nv}$  с участием луча  $p = 0$  и двух ветвей (нижней и верхней) луча  $p = 2$  и двухлучевая индикатриса  $g_{0,2n}$ . Здесь же представлен квадрат функции Эйри (см. [14]) и отмечено положение минимумов радуги, определяемых соотношением (23). При расчете  $g_{0,2nv}$  было использовано выражение  $f_2 = \exp(-14(\theta - \theta_{2,r}))$  в выражении (10б). Из рис. 7 видно, что функция Эйри хорошо описывает средние значения и крупномасштабную осцилляционную структуру радуги, но не отражает дополнительную осцилляционную структуру. В то же время интерференционная индикатриса  $g_{0,2nv}$  хорошо описывает (за исключением области вблизи первого максимума) полную осцилляционную структуру. Из сопоставления индикатрис  $g_{0,2nv}$  и  $g_{0,2n}$  видно, что малые осцилляционные периоды первой согласуются с основными периодами второй. Отметим разную зависимость от  $x$  малых и больших осцилляционных периодов радуг, описываемых соотношениями (18) и (23) соответственно, что указывает на сложный характер асимптотической осцилляционной картины даже основной радуги  $p = 2$  ввиду влияния луча  $p = 0$ . Отметим также, что влияние последнего на осцилляционную картину радуги  $p = 3$  еще заметнее из-за увеличения его относительного вклада.

Сопоставление точной и двухлучевой интерференционных индикатрис  $g_{0,2n}$  представлено на рис. 7, б. Видно, что уже на небольших удалениях от угла  $180^\circ$  осцилляционная картина точной индикатрисы соответствует таковой для интерференционной индикатрисы  $g_{0,2n}$ , с небольшими остатками мелкомасштабных осцилляций с периодом  $\approx \pi/x$ . Наблюдается полное совпадение средних величин и хорошее совпадение минимумов для области  $p2$  с полученными из соотношения (19а). Вместе с тем на точной индикатрисе

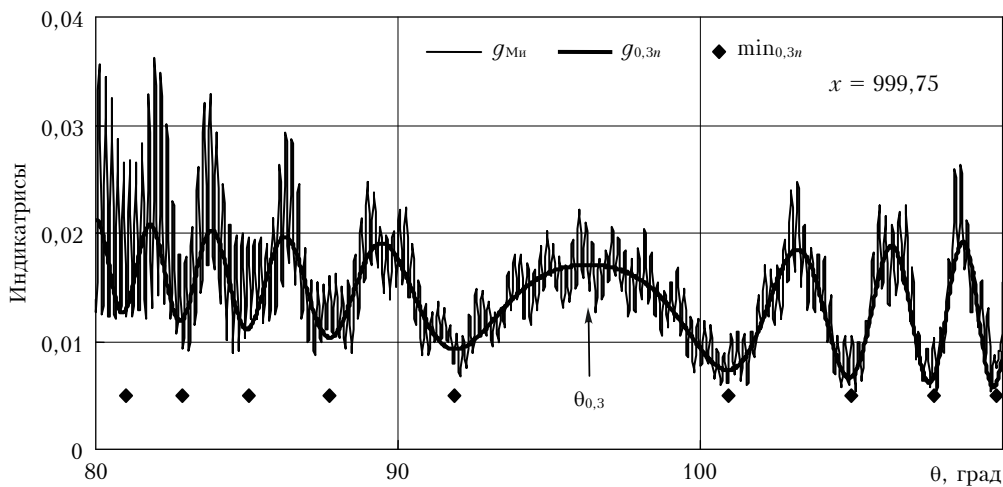


Рис. 6. Интерференционная и точная индикатрисы для  $m = 4/3$  в области  $p3$

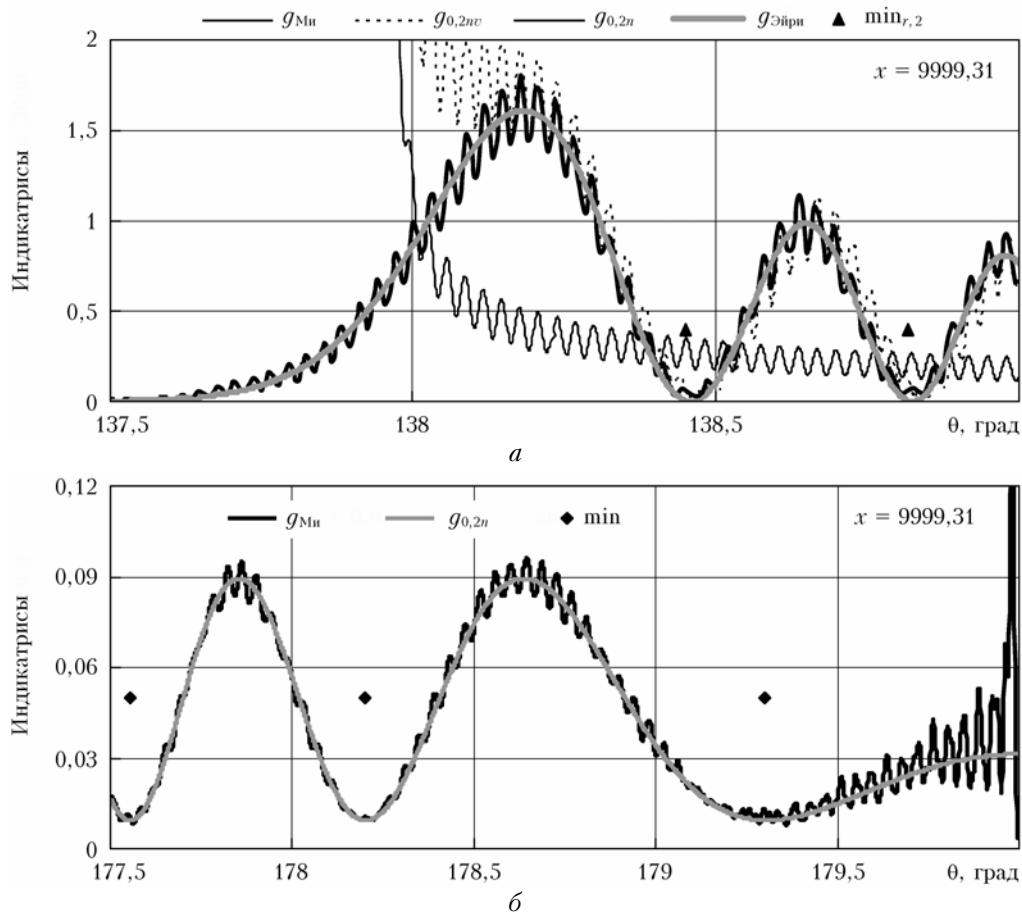


Рис. 7. Сопоставление точной и интерференционных индикатрис для областей: *a* – радуга 2 и *б* – *p*2. Точки – положение минимумов, полученных из соотношений (23) и (18) соответственно

вблизи угла  $180^\circ$  имеется структура с большой амплитудой осцилляций, которая представляет собой явление глории [10].

### 3.5. Сопоставление осцилляционной зависимости от $x$

Перед операцией сопоставления индикатрис напомним отмеченную выше независимость осцилляционных периодов по параметру  $M_i$  от  $x$ , поэтому выбор интервала сравнений не критичен. Для графического представления результатов сопоставления индикатрис была выбрана область параметров  $M_i$  в районе  $x \approx 100$ , для которой идентификация резонансной структуры обратного рассеяния имеется в работе [10]. Соответствующие графики точной и интерференционных индикатрис представлены на рис. 8. Отметим, что для угла  $\theta = 0^\circ$  представлены деленные на  $x^2$  данные, а для угла  $180^\circ$  интерференционная индикатриса умножена на 10 и приподнята на 1,5. Указаны также численные значения периодов  $\Delta x_{i,j}$ , полученные из соответствующих соотношений (13), (19б) и (20а).

Анализ кривых позволил сделать два основных заключения. 1) Получаемая из рассмотрения интерференционных индикатрис структура осцилляцион-

ной зависимости соответствует крупномасштабной зависимости точной индикатрисы. Можно считать этот вывод достаточно тривиальным, если отвлечься от полученных в разд. 2 количественных закономерностей. 2) Для всех углов рассеяния на крупномасштабные осцилляции накладывается влияние резонансных пиков, относительный вклад которых увеличивается с ростом угла рассеяния, а для обратного рассеяния становится уже преобладающим. Период резонансных пиков для  $m = 4/3$  равен  $\Delta x = 0,82$ , что для  $x \approx 10^2$  сопоставимо с интерференционными периодами  $\Delta x_{0,2}$  и  $\Delta x_{0,3}$ . Для углов  $90-100^\circ$  (на рис. 8,  $\theta = 96,4^\circ$ ) это приводит к очень сложной зависимости индикатрисы от  $x$  для представленного диапазона параметров  $M_i$ . Отметим, что проявление отдельного резонанса не обязательно быть при всех углах из-за его индивидуальной угловой зависимости. При значительном увеличении параметра  $x$  картина упрощается ввиду снижения относительной доли резонансных пиков в суммарной индикатрисе. Однако для  $\theta = 180^\circ$  такого упрощения не происходит, что и проявляется в явлении глории [10].

Итак, из проведенного в разд. 3 сопоставления следует, что при больших параметрах  $M_i$  практически во всем интервале углов  $\theta = 0 \div 180^\circ$  крупномасштабная осцилляционная угловая картина точной

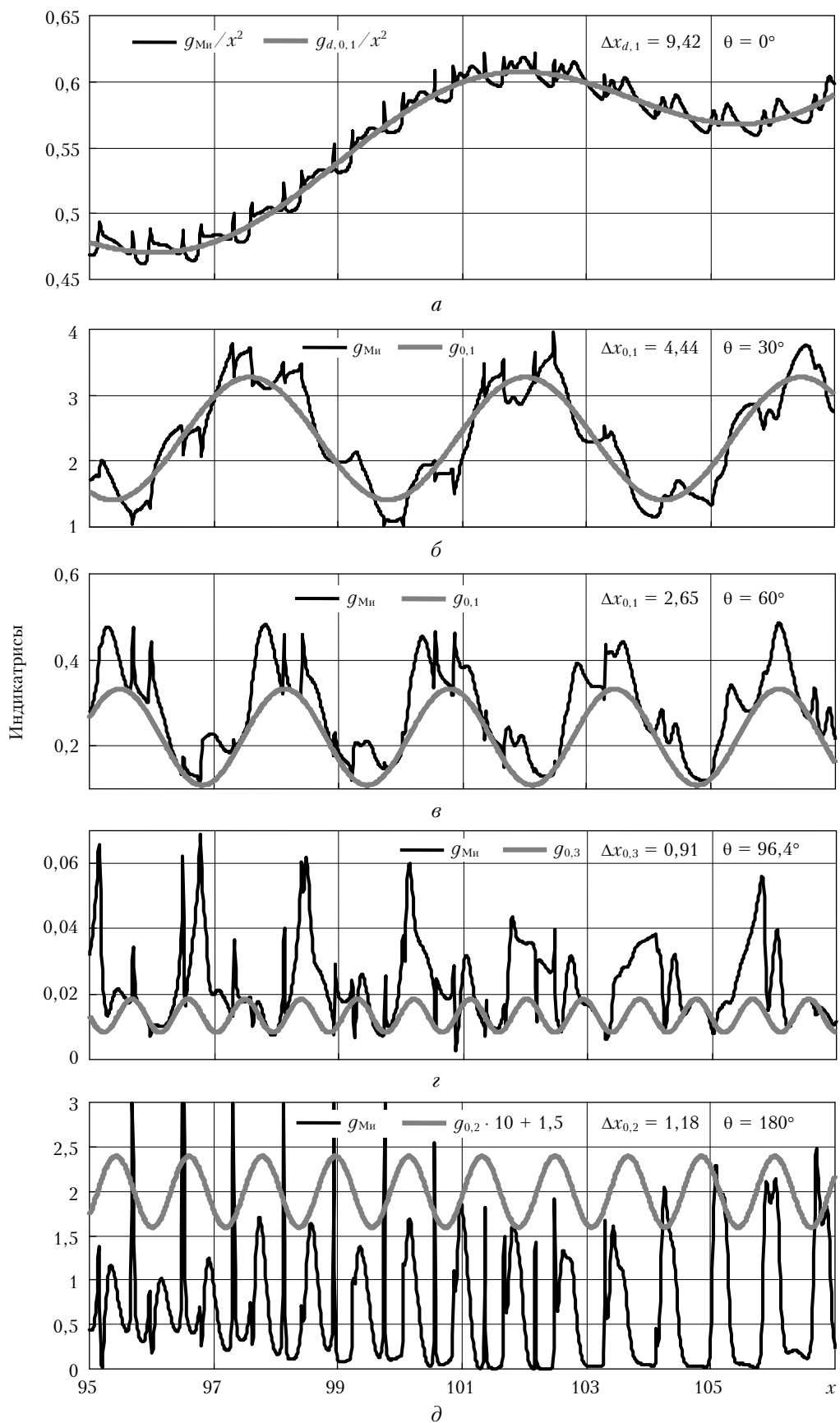


Рис. 8. Зависимость точных и интерференционных индикатрис от параметра Ми при  $m = 4/3$  и углах  $\theta = 0; 30; 60; 96,4$  и  $180^\circ$

индикатрисы качественно описывается интерференцией дифракционного и парциальных лучей от  $p = 0$  до  $p = 5$ . Приведенные в разд. 2 фазовые соотношения позволяют достаточно точно описать асимптотическое поведение этой осцилляционной структуры при стремлении параметра Ми к бесконечности.

Для дифракционной области оно состоит в известном законе стремления индикатрисы рассеяния вперед по закону  $x^2$  и расстояния между минимумами индикатрисы по закону  $1/x$ . В остальных областях основной осцилляционной характеристикой при больших параметрах  $x$  является постоянство амплитудного коридора осцилляций индикатрисы, зависящего от угла  $\theta$ . Периоды этих осцилляций при увеличении  $x$  стремятся к нулю по закону  $x^{-1}$  в области  $p1$ , по закону  $x^{-1/2}$  в области лучей 2 и 3 и по закону  $x^{-2/3}$  в области радуг 2 и 3. На этом зависимости интерференционных индикатрис от  $x$  заканчиваются, поскольку их средняя величина от этого параметра не зависит и при больших  $x$  совпадает со средней величиной точной индикатрисы, т.е. является асимптотической ее величиной. Естественным поэтому представляется составление расчетной зависимости усредненных значений точной индикатрисы от параметра  $x$  для выбранных интервалов углов. Из рис. 3–8 следует, что и для очень больших параметров  $x \approx 10^4$  в области радуг 4 и 5, а также вблизи углов  $\theta = \pi$  и  $\theta_{0,3}$  все еще остаются осцилляционные структуры с периодом в несколько градусов. Это обстоятельство необходимо учитывать при выборе интервала усреднения значений индикатрисы по углу рассеяния. При выборе шага вычислений этих характеристик по  $\theta$  надо иметь в виду, что на расчетной Ми индикатрисе в районе больших осцилляционных периодов остаются заметными осцилляции, обусловленные членами ряда с  $l = L_b$ . Следовательно, шаг по углу  $\theta$  для учета всех особенностей изменения точной индикатрисы должен быть намного меньше расстояния между нулями функции  $\tau(\theta)$  для  $l = L_b$ , примерно равного  $\pi/l$ . С этой же целью шаг интегрирования по параметру  $x$  должен быть намного меньше малого резонансно периода  $\delta x$ , равного приблизительно  $1,1/m$  [10].

#### 4. Аппроксимация частичных интегральных индикатрис

Для представления усредненных индикатрис вначале вычислялось среднее по  $\Delta x = \delta x$  значение частичных интегралов точной индикатрисы по интервалам углов  $5^\circ$ , определяемое формулами (6), (26) и (26а). Во избежание неоднозначностей в трактовке выпишем выражение для него еще раз:

$$\bar{G}(\theta_n, \theta_k, \bar{x}) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} dx \int_{\theta_n}^{\theta_k} \gamma(m, x, \theta) \sin(\theta) d\theta. \quad (28)$$

Затем проводился графический просмотр получаемых зависимостей на предмет возможности аппроксимации их простыми аналитическими соотноше-

ниями. При этом оказалось, что во избежание больших осцилляционных зависимостей по параметру  $x$  интервал интегрирования необходимо увеличивать до  $10\text{--}15^\circ$ . Значения этих интервалов приводятся в первой колонке табл. 2. Получаемые после этого массивы данных аппроксимированы трехпараметрической формулой

$$\bar{G}_{\text{аппр}} = G_{\text{ГО}} \left[ 1 + \frac{a}{\bar{x} + b} \right]. \quad (29)$$

В ней для асимптотического предела при больших параметрах  $x$  были использованы интегральные значения  $G_{\text{ГО}}$ , которые получены при расчете индикатрисы в приближении ГО с использованием разработанного в работе [9] метода. Эти значения приводятся во второй колонке. В последующих колонках приводятся следующие два параметра аппроксимационной зависимости (29), определение которых проводилось путем графического подбора.

Таблица 2  
Значения аппроксимационных коэффициентов в формуле (29)

Диапазон углов	$G_{\text{ГО}}$	$a$	$b$	$\min \langle x \rangle$
10–20	0,2428	8	12	50
20–30	0,2335	2,5	12	50
30–40	0,169	2,5	12	40
40–50	0,1036	3	–6	40
50–60	0,0525	13	4	20
60–70	0,0204	45	16	20
70–80	0,0056	170	20	20
80–90	0,00272	150	3,5	20
90–100	0,00235	80	–3	10
100–110	0,00213	70	–2	20
110–120	0,00236	130	25	20
120–135	0,0073	50	4	10
135–150	0,0337	4,5	3	10
150–160	0,0069	70	20	20
160–170	0,00235	130	4	15
170–180	0,00074	230	1	15
20–40	0,4025	2,5	12	12
40–60	0,156	6,5	1	15
60–120	0,03558	90	16	22
120–130	0,0065	13	–5	10
130–135	0,00077	400	14	10

В последних пяти строках таблицы приведены данные для дополнительных интервалов, которые могут представлять интерес для решения конкретных задач.

Характер совпадения точных и аппроксимационных величин иллюстрируется на рис. 9. Из рассмотрения этих и других данных следует, что при  $\langle x \rangle$  больше 100 аппроксимационные формулы хорошо воспроизводят точные значения при отклонениях от средних аппроксимационных значений на величины не более 1%. При уменьшении  $\langle x \rangle$  колебания с переменными знаками около гладких аппроксимационных кривых нарастают, достигая амплитуды порядка 10% вблизи порога  $\min \langle x \rangle \approx 20$ .

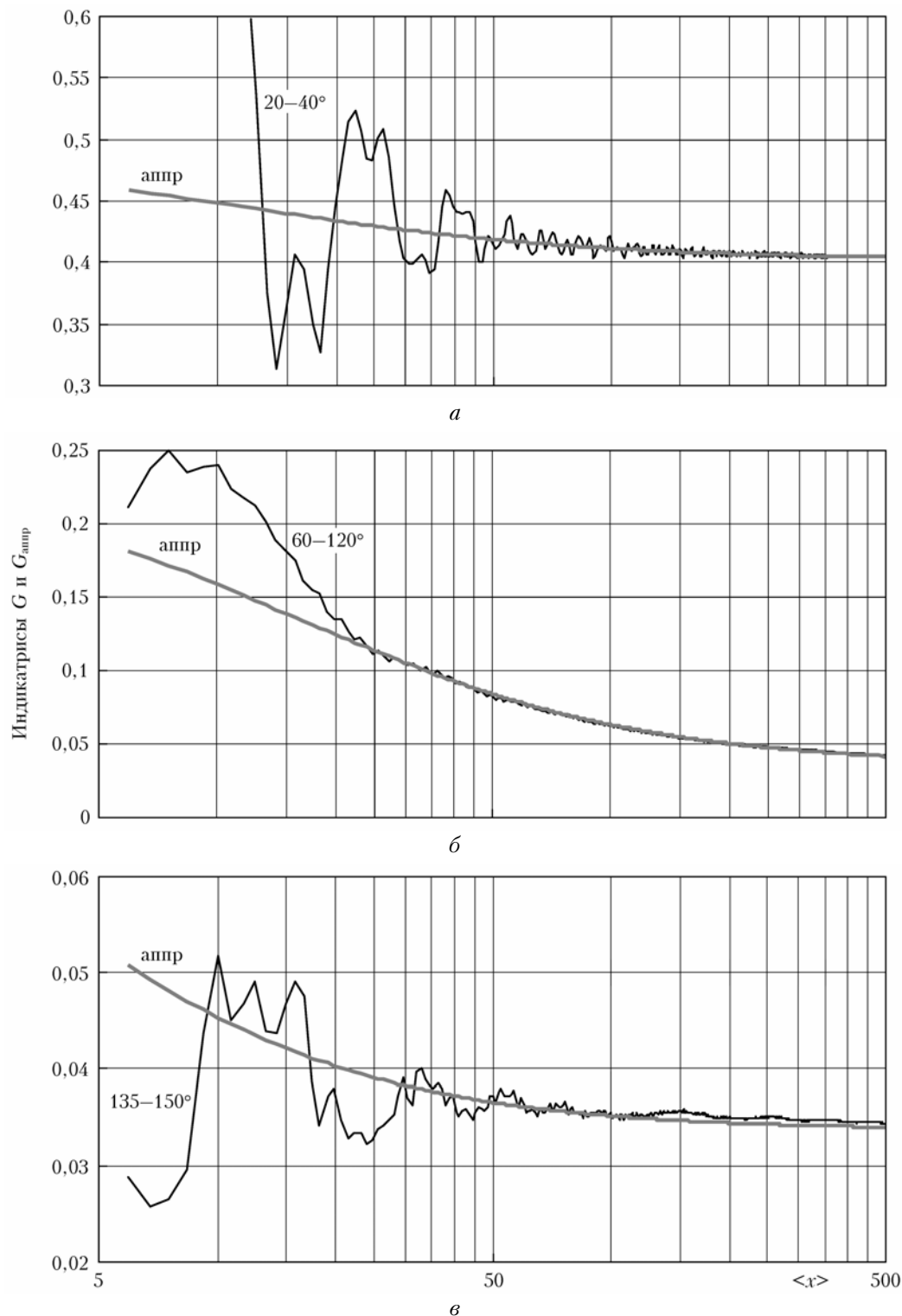


Рис. 9. Зависимость точных  $\langle G(\theta_n, \theta_k) \rangle$  и аппроксимационных индикатрис от  $\langle x \rangle$  по формуле (29) с коэффициентами табл. 2. Возле кривых указан интервал значений  $\theta_n$  и  $\theta_k$

Значения этого порога для конкретных диапазонов  $\theta$  приводятся в последней колонке табл. 2.

Из табличных данных трудно представить качественную картину трансформации средних индикатрис с изменением параметра  $x$ , поэтому на рис. 10

приводится графическая иллюстрация этой зависимости.

Отметим, что в районе  $20-40$  и  $135-150^\circ$  средние индикатрисы, начиная  $x \approx 20$ , практически не зависят от этого параметра.

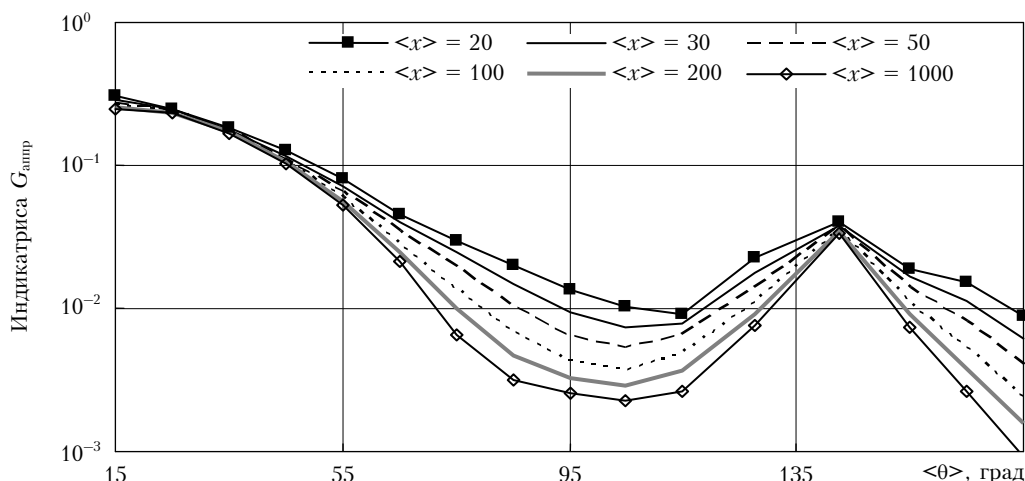


Рис. 10. Графическая зависимость  $G_{амп}$  от  $\langle x \rangle$

### Заключение

Представленные выше материалы подтверждают первый, в общем-то тривиальный, вывод о том, что свойства индикатрисы рассеяния больших прозрачных шаров могут быть адекватно представлены интерференционной картиной парциальных лучей ГО с добавлением дифракционной составляющей. Второй общий вывод состоит в том, что ряды Ми при корректном их вычислении адекватно описывают фактические результаты рассеяния света на сферических частицах, несмотря на огромное число членов ряда при больших параметрах  $x$ . Сомнения по этому поводу до сих пор высказываются в литературе [16].

К конкретным результатам нашей работы можно отнести следующие.

1. Одним из основных оригинальных и принципиально важных результатов является уточнение амплитуды дифракционного луча в процессе сопоставления точной и интерференционных индикатрис. Это уточнение позволило проводить вычисление текущего интеграла индикатрисы для водяных капель в пределах от  $0$  до  $\approx 10^\circ$  с приемлемой для многих задач атмосферной и приборной оптики погрешностью.

2. Вторым важным результатом процесса сопоставления являются уточнение сдвига фаз парциальных лучей и поиск их связи с количеством внутренних отражений. Из других соображений вопрос сдвига фаз однозначным образом не решается [17]. Важность этого уточнения подтверждается необходимостью расчета индикатрис рассеяния на несферических частицах [18].

3. Еще одним результатом наших исследований является получение аналитических закономерностей для двухлучевой интерференции парциальных лучей ГО. Это позволило вместе с известными свойствами радуг, в которых осцилляционный период между минимумами определяется законом  $x^{-2/3}$ , обнаружить основные закономерности трансформации интерференционных индикатрис в областях, следующих за дифракционной. Первой из них является постоянство амплитудного коридора осцилляций, зависяще-

го от угла  $\theta$ . Вторая закономерность состоит в том, что периоды этих осцилляций при увеличении  $x$  стремятся к нулю по закону  $x^{-1}$  при интерференции лучей с различной четностью целой части  $\pi$ -интервалов полных углов. При одинаковой четности таких интервалов в области интерференции появляется точка со стационарной разностью фаз, вблизи которой интервал между минимумами определяется законом  $x^{-1/2}$ . При этом показано, что для радуг мелкомасштабная структура осцилляций качественно и количественно описывается влиянием луча  $p = 0$  и также подчиняется закону  $x^{-1/2}$ .

4. Важным результатом является и полученное расчетным путем заметное влияние на форму асимптотической индикатрисы водяных капель радуг 4 и 5 в виде модуляции амплитуд осцилляционной структуры индикатрисы  $g_{0,1}$ .

В заключение можно сказать, что индикатриса Ми (см. рис. 2, а) качественно имеет окончательную асимптотическую форму, которая при увеличении параметра  $x$  трансформируется только в направлении уменьшения осцилляционных периодов по указанным выше законам. Представленное в [19] разнообразие форм индикатрисы при больших параметрах Ми объясняется большим шагом по углу  $\theta$  при их расчете.

Отметим также, что на все указанные выше интерференционные закономерности накладываются резонансные структуры со стремящимися к нулю полуширинами по углу  $\theta$  при росте параметра  $x$ . Это подтверждает наш вывод о неинформативности вычислений по теории Ми в отдельной точке и о необходимости получения усредненных значений, которые и представлены в табл. 2. Пределы их применения могут быть проверены путем сравнения вычисленных индикатрис рассеяния реальных облачных спектров. Однако слабая зависимость частичных интегралов от параметра Ми (см. рис. 10) для двух областей уже сейчас может служить основой при разработке приборов для измерения размеров облачных капель.

Материалы работы докладывались на XVIII Международном симпозиуме [20, 21]. В докладе [21]

отмечено, что полученная поправка для амплитуды дифракционного луча (12в) и (12г) справедлива и для слабопоглощающих шаров с действительной частью показателя преломления от 1,1 до 1,9 и более.

1. Хюлст Г., ван де. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 536 с.
2. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
3. Wiscombe W.J. Improved Mie scattering algorithms // Appl. Opt. 1980. V. 19, N 9. P. 1505–1509.
4. Романов Н.П. Исследование методов и погрешностей вычисления функций Риккати–Бесселя // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20, № 8. С. 701–709.
5. Glantschnig W.J., Chen S.-H. Light scattering from water droplets in the geometrical optics approximation // Appl. Opt. 1981. V. 20, N 14. P. 2499–2509.
6. Ungut A., Grehan G., Gouesbet G. Comparisons between geometrical optics and Lorenz–Mie theory // Appl. Opt. 1981. V. 20, N 17. P. 2911–2918.
7. Bosch H.F.M., Ptasincki K.J., Kerkhof P.J.A.M. Edge contribution to forward scattering by spheres // Appl. Opt. 1996. V. 35, N 13. P. 2285–2291.
8. Zhou X., Li S., Stamnes K. Geometrical-optical code for computing the optical properties of large dielectric spheres // Appl. Opt. 2003. V. 42, N 21. P. 4295–4306.
9. Романов Н.П. Методика расчета и свойства индикатрис рассеяния прозрачных шаров в приближении геометрической оптики // Оптика атмосф. и океана. 2009. Т. 22, № 5. С. 435–444.
10. Романов Н.П., Дубниченко С.О. Физика образования и аналитическое описание свойств глории // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 7. С. 549–560.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Физматлит, 1978. 832 с.
12. Adam J.A. Geometric optics and rainbows: generalization of a result by Huygens // Appl. Opt. 2008. V. 47, N 34. P. H11–H13.
13. Горелик Г.С. Колебания и волны. 3-е изд. М.: Физматлит, 2007. 655 с.
14. Ru T. Wang, Hulst H.C., van de. Rainbows: Mie computations and the Airy approximation // Appl. Opt. 1991. V. 30, N 1. P. 106–117.
15. Grossman M., Schmidt E., Hausmann A. Photographic evidence for third-order rainbow // Appl. Opt. 2011. V. 50, N 28. P. 134–141.
16. Невзоров А.Н. О теории и физике образования глории // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 4. С. 344–348.
17. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
18. Sagedhi I., Munoz A., Laven P., Jarosz W., Seron F., Gutierrez D., Jensen H.W. Physically-Based Simulation of Rainbows // ACM Transactions on Graphics. 2011. V. 31, N 1. P. 1–12.
19. Laven P. Simulation of rainbows, coronas and glories by use of Mie theory // Appl. Opt. 2003. V. 42, N 3. P. 436–444.
20. Дубниченко С.О., Романов Н.П. Интерференционная структура и асимптотические закономерности рассеяния света каплями воды // Тезисы докл. XVIII Междунар. симпоз. «Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы». Иркутск, июль 2012. С. 27.
21. Бородин С.А., Романов Н.П. Интерференционная структура рассеяния света слабопоглощающих шаров в области дифракционного максимума // Тезисы докл. XVIII Междунар. симпоз. «Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы». Иркутск, июль 2012. С. 20–21.

*N.P. Romanov, S.A. Borodin, S.O. Dubnichenko, L.D. Novikova. Large-scale structure and asymptotic regularities of phase scattering function for water in the visible spectrum range.*

The analysis of mechanisms of radiation scattered in the range of angles  $\theta$  from 0 to 180° is made for a sphere by comparing the exact phase scattering functions calculated with the Mie theory and interference phase scattering functions with the use of diffraction and partial rays of geometric optics (GO). In view of refinements of relative phase shifts of all rays and the amplitude of the diffraction ray, it appeared that large-scale oscillation regularities of the exact phase scattering function at high Mie parameters  $x$  corresponded to the interference pattern of two or three rays mentioned above. For integral characteristics a computation error with the interference formulae in the range of angles  $\theta = 0 \div 10^\circ$  does not exceed units of percent for  $x > 10$  and within the large  $x$  values it tends to zero. For other ranges, depending on the difference in the combination of the integer parts parity in the  $\pi$  intervals of the total scattering angle tendency of oscillation periods over the angle to zero is seen according to the laws of  $x^{-1}$ ,  $x^{-2/3}$  (rainbows) and  $x^{-1/2}$ . The oscillation period over  $x$  begins to depend only on  $\theta$ . The results of the calculations of exact phase scattering functions average over the intervals  $\Delta\theta = 10 \div 15^\circ$  for the refraction index  $m = 4/3$  are presented in the form of approximation relationships with the asymptotic tendency to the GO phase scattering function.