<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 11 (1993)

УДК 535.36

К.А. Шаповалов

ОБОБЩЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ИНДИКАТРИСЫ СВЕТОРАССЕЯНИЯ

Рассмотрены обобщенные параметры для интегральной индикатрисы светорассеяния полидисперсной взвеси сферических частиц. На основе полученных аналитических выражений полидисперсной интегральной индикатрисы в приближении Рэлея–Ганса–Дебая проанализированы возможности применения таких параметров для упрощения задачи до монодисперсной взвеси. Приведены результаты расчетов.

Особый интерес в различных областях астрономии, биофизики, химии, медицины представляет рассеяние света на оптически <мягких> частицах, т.е. частицах с показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей их среды (относительный показатель преломления $m \to 1$, или $|m-1| \ll 1$) [1 – 3]. Целый класс или группа, состоящая из <мягких> аномальных дифракций (АД), т. е. больших частиц (дифракционный параметр $\rho \gg 1$), достаточно подробно рассмотрена в [4]. В области РГД (Рэлея – Ганса – Дебая, малый фазовый сдвиг $\Delta \ll 1$, $\Delta = kd|m-1|$, где d – максимальный размер частиц) практически нет работ с применением обобщенных параметров для полидисперсных взвесей сферических частиц.

Данная статья посвящена поиску обобщенных параметров для интегральной индикатрисы светорассеяния сферических частиц в приближении РГД. Под термином интегральная индикатриса понимается доля потока энергии, рассеянной в конус с углом раствора θ, относительно общего светорассеяния.

Используем выражение, которое получено в [5] для интенсивности, рассеянной в конус с углом раствора θ (для одной сферической частицы):

$$\frac{I_\theta}{\pi a^2} = I_0 |m-1|^2 \left\{ A + 2\rho^2 + (4b^2 - 2A)\frac{\sin(4\rho b)}{4\rho b} + \left[\frac{\cos(4\rho b) - 1}{(4\rho b)^2}\right](12b^2 - 2A) + \left(\frac{1}{2\rho^2} - 2\right) S_1(4\rho b) \right\}, \quad (1)$$

где $A = 2 + b^2 - \dfrac{1}{2b^2}$; $S_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos u}{u}\,du = \ln(x) + \gamma - Ci(x)$, $Ci(x) = \displaystyle\int_\infty^x \frac{\cos u}{u}\,du$ – интегральный косинус;

$b = \sin(\theta/2)$; $\gamma = 0{,}577216$ – постоянная Эйлера– Маскерони; a – радиус частицы. Из (1) можно получить выражение для фактора эффективности расссеяния K_p, так как угол раствора $\theta = \pi$, то $b = 1$, т.е.

$$K_p = \frac{k_p}{\pi a^2} = \frac{I_\pi}{\pi a^2} = I_0 |m-1|^2 \left\{ \frac{5}{2} + 2\rho^2 - \frac{\sin(4\rho)}{4\rho} + \frac{7}{16\rho^2}[\cos(4\rho) - 1] + \left(\frac{1}{2\rho^2} - 2\right) S_1(4\rho) \right\}, \quad (2)$$

что совпадает с полученным еще Рэлеем выражением [2, 4, 6].

Интегральная индикатриса $F(2\rho b)$ для РГД-шара представляет собой отношение (1) к (2):

$$F[2\rho \sin(\theta/2)] = (I_\theta / k_p). \quad (3)$$

В дальнейшем используются плотности распределений следующего вида [4, 8]:

а) гамма

$$f(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \dfrac{\beta^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} a^\mu \exp(-\beta a), & a \ge 0, \quad (\mu > -1, \beta > 0), \end{cases} \quad (4)$$

где $\beta = (\mu + 1)/\bar{a}$, ($\bar{a}$ – средний радиус полидисперсной взвеси);

б) степенное

$$f(a) = \begin{cases} 0\,, & \text{при } a < a_{\min} \text{ и } a > a_{\max}\,, \\ \dfrac{(\nu - 1)\, a_{\min}}{1 - R^{1-\nu}}\, a^{-\nu} = C_\nu\, a^{-\nu}\,, & \text{при } a_{\min} \le a \le a_{\max}\,, \end{cases} \tag{5}$$

где $R = a_{\max}/a_{\min}$; $a_{\min}$, $a_{\max}$ – минимальный и максимальный радиусы частиц взвеси. Для получения интегральной индикатрисы полидисперсной взвеси сферических частиц необходимо проинтегрировать выражения (1) и (2) с учетом плотности распределения и площади поперечного сечения частицы. Таким образом,

$$<F(\theta)> = \frac{\pi \int\limits_0^\infty I_\theta f(a)\, a^2\, da}{\pi \int\limits_0^\infty K_p f(a)\, a^2\, da} = \frac{<I_\theta>}{<k_p>}\,. \tag{6}$$

Для получения интегральной индикатрисы $<F(\theta)>$ достаточно вычислить в (6) $<I_\theta>$, а $<k_p>=<I_\pi>$. Поэтому, используя (1) и (4), имеем

$$<I_\theta> = \frac{\pi I_0\, |m-1|^2\, \beta^{\mu+1}}{k^{\mu+3}\, \Gamma(\mu+1)} \int\limits_0^\infty \Bigg[A\rho^2 + 2\rho^4 + (2A - 4b^2)\, \frac{\sin(4\rho b)}{4b}\, \rho + \left(\frac{12b^2 - 2A}{16b^2}\right) \times$$

$$\times \left(\cos(4\rho b) - 1\right) + (1/2 - 2\rho^2)\, S_1(4\rho b) \Bigg] \rho^\mu \exp((-\beta/k)\,\rho)\, d\rho\,. \tag{7}$$

В (7) также осуществлена замена $\rho = k\,a$, т.е. интегрирование ведется по ρ, а не по радиусу a.

После интегрирования (7) окончательно получаем выражение для $<I_\theta>$ в виде конечной суммы элементарных функций [5].

Аналогично можно получить интегральную индикатрису $<I_\theta>/<k_p>$ для степенного распределения (см. [5]).

В качестве обобщенных были выбраны 4 различных параметра. В данном случае для гамма-распределения они имеют вид

$$\begin{aligned} &1.\ <\rho> = (\mu + 1)\,(k/\beta) = t_1\,; \\ &2.\ \sqrt{<\rho^6>/<\rho^4>} = \sqrt{(\mu + 5)\,(\mu + 6)}\,(k/\beta) = t_2\,; \\ &3.\ \sqrt{<\rho^4>/<\rho^2>} = \sqrt{(\mu + 3)\,(\mu + 4)}\,(k/\beta) = t_3\,; \\ &4.\ (3/4)\, k<V>/<S> = (\mu + 3)\,(k/\beta) = t_4\,, \end{aligned} \tag{8}$$

где k – волновое число.

Обобщенные координаты представлены как $t_i\theta$. Для степенного распределения обобщенные параметры аналогично гамма-распределению имеют вид

$$\begin{aligned} &1.\ <\rho> = \rho_{\min} \frac{(3 - \nu)\,(R^{4-\nu} - 1)}{(2 - \nu)\,(R^{1-\nu} - 1)} = t_1\,; \\ &2.\ \sqrt{<\rho^6>/<\rho^4>} = \rho_{\min} \sqrt{\frac{(5 - \nu)\,(R^{7-\nu} - 1)}{(7 - \nu)\,(R^{5-\nu} - 1)}} = t_2\,; \\ &3.\ \sqrt{<\rho^4>/<\rho^2>} = \rho_{\min} \sqrt{\frac{(3 - \nu)\,(R^{5-\nu} - 1)}{(5 - \nu)\,(R^{3-\nu} - 1)}} = t_3\,; \\ &4.\ (3/4)\, k<V>/<S> = \rho_{\min} \frac{(3 - \nu)\,(R^{4-\nu} - 1)}{(4 - \nu)\,(R^{3-\nu} - 1)} = t_4\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Сравнение проведено для наиболее распространенной в экспериментальных распределениях степени 4, а также диапазонов изменения размеров частиц ρ от 5 до 25 и от 5 до 15 [4, 8, 9].

Результаты сравнения показаны в таблице. Здесь сравниваются значения интегральной индикатрисы для одной частицы, рассчитанные по формуле (3), и для распределения сферических частиц, причем значения $t_i\theta$ не превосходят 3, т.е. рассматривается малоугловая область светорассеяния. Относительная погрешность вычисляется по формуле

$$(F_{\text{прибл}} - F_{\text{точн}}) * 100\% / F_{\text{точн}}. \tag{10}$$

Из таблицы видно, что для $\langle\rho\rangle$ относительная погрешность в случае гамма-распределения уменьшается при возрастании μ, тем не менее в области <реальных> взвесей, где присутствуют частицы всех размеров, т.е. $\mu < 10$, погрешность достигает минус 60%.

Для 2-обобщенного параметра $\sqrt{\langle\rho^6\rangle/\langle\rho^4\rangle}$ ситуация значительно лучше, здесь даже при $\mu = 7$ погрешность не более 12%. Естественно, при возрастании μ она уменьшается, и уже при $\mu = 10$ и тех же условиях погрешность не превосходит 8%.

Для 3-обобщенного параметра $\sqrt{\langle\rho^4\rangle/\langle\rho^2\rangle}$, выбранного из условия минимизации погрешности $\langle k_p\rangle$, при μ=7 погрешность менее минус 30%.

Для 4-обобщенного параметра $k\langle V\rangle/\langle S\rangle$, характеризующего отношение среднего объема к среднему сечению частиц взвеси, погрешность невелика: при $\mu < 10$ не более –35÷–30%, хотя при дальнейшем увеличении μ погрешность существенно не уменьшается.

Таблица

Максимальная относительная погрешность интегральной индикатрисы одной частицы по сравнению с гамма- и степенным распределением сферических частиц в обобщенных координатах

Распределение	Обобщенный параметр			
	$\langle\rho\rangle$	$\sqrt{\langle\rho^6\rangle/\langle\rho^4\rangle}$	$\sqrt{\langle\rho^4\rangle/\langle\rho^2\rangle}$	$\frac{3}{4}k\langle V\rangle/\langle S\rangle$
Гамма $\mu = 7$, $\beta = 0{,}1$	– 59%	12%	– 30%	– 35%
$\mu = 10$, $\beta = 0{,}1$	– 49%	8%	– 24%	– 29%
Степенное $\nu = 4$, $\rho_{min} = 5$, $\rho_{max} = 25$	– 80%	+ 18%	– 51%	– 32%
$\nu = 4$, $\rho_{min} = 5$, $\rho_{max} = 15$	– 57%	+ 10%	– 33%	+ 17%

Для степенного распределения изменение относительной погрешности имеет аналогичный характер. Очевидно также, что при уменьшении ρ_{max}, т.е. при стремлении к монодисперсной взвеси, погрешность существенно падает по абсолютной величине.

Таким образом, учитывая результаты сравнения, можно сказать, что только 2-обобщенный параметр $\sqrt{\langle\rho^6\rangle/\langle\rho^4\rangle}$ позволяет в малоугловой области достичь минимальной погрешности по сравнению с индикатрисой одной частицы, а самый <естественный> параметр $\langle\rho\rangle$ – средний размер частиц – дает грубое приближение. Однако надо заметить, что в ходе сравнения нигде не учитывается относительный показатель преломления (так как $m = 1$). Влияние последнего фактора приведет к существенному уменьшению относительной погрешности, что и позволит использовать в практических исследованиях средний размер частиц $\langle\rho\rangle$ с погрешностью около 30% [4].

1. Сидько Ф.Я., Лопатин В.Н., Парамонов Л.Е. Поляризационные характеристики взвесей биологических частиц. Новосибирск: Наука, 1990. 120 с.
2. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. литературы, 1961. 536 с.
3. Гринберг М. Межзвездная пыль. М.: Мир, 1970. 199 с.
4. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвесей клеток. Новосибирск: Наука, 1988. 240 с.
5. Шаповалов К.А. Обобщенные параметры для полидисперсной интегральной индикатрисы светорассеяния в приближении Рэлея–Ганса–Дебая. Красноярск. 1993. 37 с. (Препринт/Ин–т биофизики СО РАН , N 199Б).
6. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной среде. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. 288 с.
7. Kerker M. The scattering of light and other electromagnetic radiation/ N. Y.; London: Academy Press, 1969–666 P.
8. Шифрин К.С. Введение в оптику океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 277 с.
9. Иванов А. Введение в океанографию. М.: Мир, 1978. 574 с.

Институт биофизики СО РАН,
г. Красноярск

Поступила в редакцию
29 июля 1993 г.

K.A. S h a p o v a l o v . **Generalized Parameters for a Polydisperse Integral Scattering Phase Function.**
Generalized parameters for integral scattering phase function of a polydisperse suspension of spherical particles are considered. A possibility of using such parameters to reduction of the problem to a monodisperse suspension is analyzed based on obtained analytical expressions for a polydisperse integral phase function in Rayleigh–Gans–Debye approximation. Some numerical results are presented.