

В.А. Банах, А.В. Фалиц

Восстановление фазы из ее главного значения

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 18.08.2006 г.

Предложена итерационная процедура исключения ошибки сглаживания, возникающей при развертке фазы из ее главного значения методом наименьших квадратов. На примере интерферограммы радара с синтетизированной апертурой показано, что уже двукратного применения метода наименьших квадратов может оказаться достаточно для полного исключения этой ошибки.

Введение

Восстановление фазы из ограниченных главным значением (по модулю 2π) цифровых фазовых данных является конечным шагом многих алгоритмов численного анализа изображений и неотъемлемой частью большинства интерферометрических методов оптической когерентной метрологии и профилометрии, радарного мониторинга топографии подстилающей поверхности. Как правило, результатом интерферометрических измерений является карта интерферометрических полос — двумерное косинусоидальное распределение фазы, модулированной измеряемой физической величиной, где фаза определена лишь в пределах главного значения.

Развертка фазы осуществляется по найденному из интерферограммы в пределах главного значения градиенту фазы $\mathbf{g}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = P[\nabla P[\psi(\mathbf{r})]], \quad (1)$$

где оператор $P[\dots]$ означает приведение величины в скобках к интервалу главного значения фазы $[-\pi, \pi)$; $\mathbf{r} = \{x, y\}$ — двумерный вектор; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$.

Для нахождения $\psi(\mathbf{r})$ можно проинтегрировать уравнение (1):

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 + \int_{L_0}^{L(\mathbf{r})} d\lg(\mathbf{r}); \quad \psi_0 = \psi_0(L_0). \quad (2)$$

В (2) $L(\mathbf{r})$ — путь интегрирования по области, где определен градиент $\mathbf{g}(\mathbf{r})$. Следовательно, зная градиент, с помощью интегрирования (2) можно определить фазу ψ с точностью до константы. Если флуктуации амплитуды интерферометрических сигналов малы, то ограниченный своим главным значением градиент главного значения фазы не содержит соленоидальную компоненту ($\nabla \times \mathbf{g} = 0$) и совпадает с градиентом истинной фазы. В этом случае интеграл (2) не зависит от выбора пути интегрирования, и мы получаем однозначное решение для фазы (с точностью до константы). При нали-

чии шумов (возникновении спекл-структуры поля интерферометрических сигналов) или резкого перепада высот отражающей поверхности пределы изменения градиента фазы могут превышать 2π , консервативность векторного поля градиента фазы нарушается ($\nabla \times \mathbf{g} \neq 0$), возникают точки ветвления и фазовая поверхность становится разрывной. Это приводит к тому, что значение интеграла (2) начинает зависеть от пути интегрирования и получается неоднозначное решение для фазы. Игнорирование нарушения потенциальности вектора $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ из-за шумов может приводить к большим ($\sim 2\pi$) ошибкам в определении фазы, накапливающимся при выполнении интегрирования (2).

Существуют два типа методов, которые позволяют избежать получения неоднозначного решения при нахождении фазы по ее градиенту. Первый заключается в том, что при интегрировании нужно обойти области, где $\nabla \times \mathbf{g} \neq 0$. Вторым основан на получении значения фазы ψ из решения уравнения (1) и сводится к минимизации квадратичной формы разностей градиентов свернутой и развернутой фаз. К первому методу относится метод проведения разрезов [1, 2], а ко второму — метод наименьших квадратов (МНК) [2, 3]. В методе проведения разрезов предполагается, что положительные и отрицательные точки ветвления фазы возникают попарно и соединены между собой фазовым разрезом. Таким образом, строится дерево разрезов, где положительная точка соединена линией с ближайшей отрицательной. После того как все разрезы проведены, выполняют интегрирование вдоль пути, который не пересекает построенное дерево. Огромное число алгоритмов развертки фазы (см., например, [2, 4–9]), по сути, воспроизводит в той или иной модификации указанные методы.

Оба метода имеют недостатки. Метод разрезов требует нахождения парных точек ветвления, что не всегда возможно. Метод наименьших квадратов хотя и подавляет шумы, вызываемые, в основном, флуктуациями интерферирующих сигналов, но с погрешностью восстанавливает фазу вблизи разрывов фазовой поверхности между парными точками

в силу своих сглаживающих свойств. Оба метода приводят к ошибкам, в результате которых теряется так называемая «скрытая фаза» [10], когда скачки фазы, превышающие 2π , обусловлены не флуктуациями сигналов и шумами, а свойствами исследуемого объекта.

В работах [10–12] предложен и апробирован в численных экспериментах алгоритм «модернизированного» метода наименьших квадратов, позволяющий правильно определять скрытую фазу вблизи разрывов фазовой поверхности, если удастся правильно идентифицировать все точки ветвления и их парность. Но это не всегда можно сделать. Кроме того, алгоритму присущ общий недостаток МНК: он приводит к ошибкам восстановления фазы в окрестности фазовых разрывов даже при точном определении скрытой фазы в силу сглаживающих свойств МНК. В данной статье предлагается способ уменьшения ошибки сглаживания.

Восстановление фазы

Рассмотрим процедуру восстановления фазы из ее главного значения на примере интерферограммы, полученной с помощью радара с синтезированной апертурой над районом Новой Каледонии (Англия), предоставленную Европейским космическим Агентством (Copyright by CNES/ESA). На рис. 1 представлен фрагмент интерферограммы размерностью 128×128 точек.

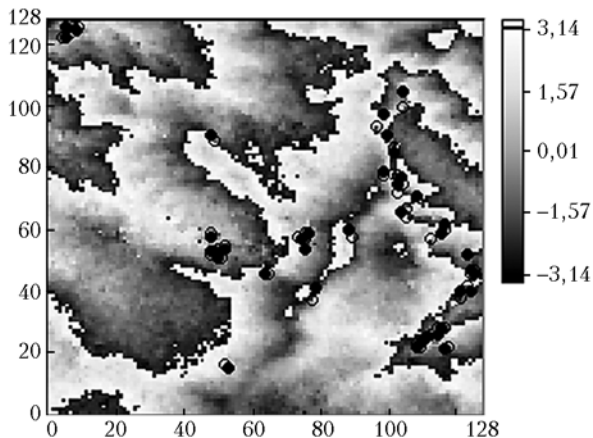


Рис. 1. Интерферограмма. Знаками \bullet , \circ показано расположение точек ветвления

Значения в интерферограмме ограничены в интервале от $[-\pi, \pi]$, и для того чтобы восстановить полное значение фазы (произвести сшивку фазовых скачков), можно воспользоваться методом наименьших квадратов. Однако, как показывает анализ, основанный на контурном суммировании разностей фазы [10, 11, 13], соленоидальная часть градиента фазы на интерферограмме не везде равна нулю и интерферограмма содержит точки ветвления фазы (рис. 1). МНК в этом случае не может восстановить фазу во всем диапазоне ее изменения, поскольку «не видит» скрытую фазу, определяемую

разрывами фазовой поверхности, проходящими через парные положительные и отрицательные точки ветвления. Поэтому был использован модифицированный МНК (ММНК) [10, 11], который позволяет рассчитать и скрытую компоненту фазы. Результаты развертки фазы этим методом представлены на рис. 2.

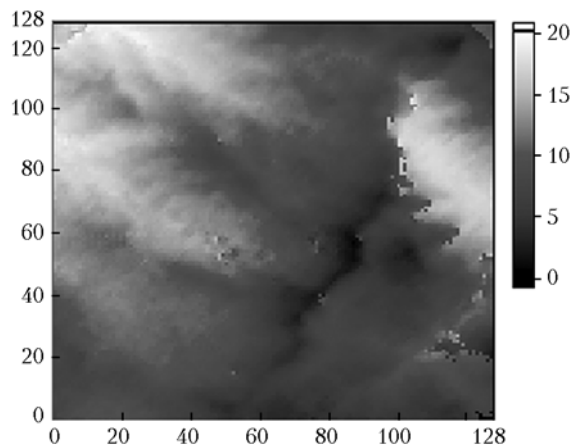


Рис. 2. Развертка фазы на интерферограмме рис. 1 модифицированным МНК

Обозначим через $\varphi(\mathbf{r})$ фазу, которая подлежит восстановлению из ее главного значения, через $\varphi_{\text{МНК}}(\mathbf{r})$ — фазу, восстановленную МНК, через $\varphi_{\text{скр}}(\mathbf{r})$ — скрытую фазу, через $\varphi_{\text{ММНК}}(\mathbf{r}) = \varphi_{\text{МНК}}(\mathbf{r}) + \varphi_{\text{скр}}(\mathbf{r})$ — фазу, восстановленную модифицированным МНК. Тогда ошибку восстановления фазы модифицированным МНК, следуя [14], можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} P[\Delta_{\text{сгр}}(\mathbf{r})] &= P[P[\varphi(\mathbf{r})] - P[\varphi_{\text{ММНК}}(\mathbf{r})]] = \\ &= P[P[\varphi(\mathbf{r})] - P[\varphi_{\text{МНК}}(\mathbf{r}) + \varphi_{\text{скр}}(\mathbf{r})]]. \end{aligned} \quad (3)$$

На рис. 3 показано 2D-распределение ограниченной главным значением ошибки восстановления фазы модифицированным МНК.

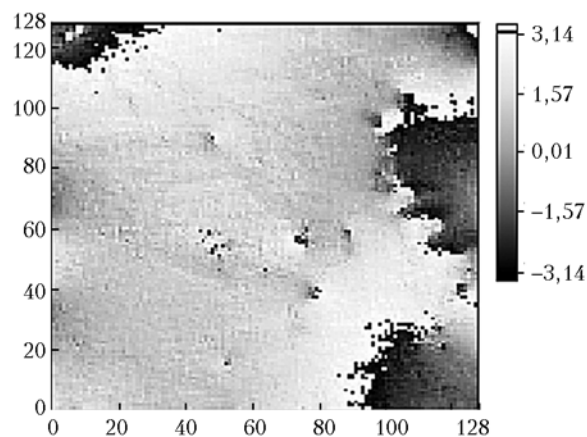


Рис. 3. Свернутая ошибка восстановления фазы модифицированным МНК

Видно, что ошибка довольно велика и принимает значения во всем диапазоне от $-\pi$ до π радиан,

хотя теоретически она должна быть близка к нулю [10, 11]. Такая разница между $P[\varphi(\mathbf{r})]$ и $P[\varphi_{\text{МНК}}(\mathbf{r})]$ объясняется сглаживающим действием оператора МНК, который осуществляет интерполяцию фазы в области «не замечаемых» им разрывов по значениям «гладкой» фазы, определяемой потенциальной частью градиента фазы.

Данную ошибку можно трактовать как недо-восстановленную часть фазы. Развернем рассчи-танную в пределах главного значения фазовую функцию $P[\Delta_{\text{сгл}}(\mathbf{r})]$ с помощью МНК и результат прибавим к $\varphi_{\text{МНК}}(\mathbf{r})$. Получаем оценку восстанавливаемой из главного значения фазы $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}) = \varphi_{\text{МНК}}(\mathbf{r}) + \Delta_{\text{сгл}}(\mathbf{r})$. Применим к $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$ оператор свертывания P и найдем в пределах главного значения разность главных значений фазовых функ-ций $\varphi(\mathbf{r})$ и $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$:

$$P[\Delta 1_{\text{сгл}}] = P[P[\varphi(\mathbf{r})] - P[\tilde{\varphi}(\mathbf{r})]], \quad (4)$$

которую, аналогично (3), также можно трактовать как ошибку восстановления или как недовосстанов-ленную часть фазы $\varphi(\mathbf{r})$. Развертка ее с помощью МНК позволяет найти оценку

$$\tilde{\varphi}_1(\mathbf{r}) = \tilde{\varphi}(\mathbf{r}) + \Delta 1_{\text{сгл}} = \varphi_{\text{МНК}} + \Delta_{\text{сгл}} + \Delta 1_{\text{сгл}}$$

и затем ошибку

$$P[\Delta 2_{\text{сгл}}] = P\{P[\varphi(\mathbf{r})] - P[\tilde{\varphi}_1(\mathbf{r})]\}. \quad (5)$$

Применение МНК к (5) дает оценку восста-навливаемой фазы

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2(\mathbf{r}) &= \tilde{\varphi}_1(\mathbf{r}) + \Delta 2_{\text{сгл}} = \tilde{\varphi}(\mathbf{r}) + \Delta 1_{\text{сгл}} + \Delta 2_{\text{сгл}} = \\ &= \varphi_{\text{МНК}} + \Delta_{\text{сгл}} + \Delta 1_{\text{сгл}} + \Delta 2_{\text{сгл}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Этот итерационный процесс может быть про-должен до достижения требуемой точности оценки фазы. Фазовая функция $\Delta_{\text{сгл}}(\mathbf{r})$ для интерферо-граммы на рис. 1 представлена на рис. 4.

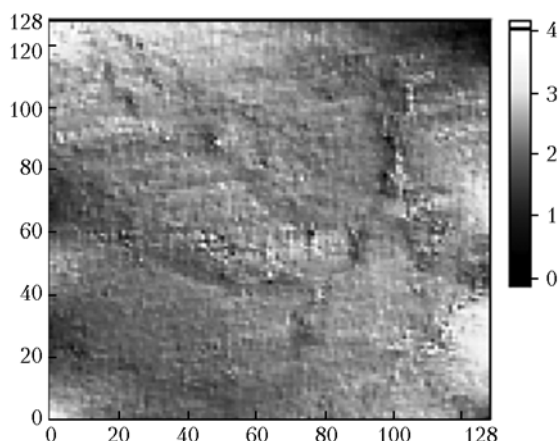


Рис. 4. Ошибка $\Delta_{\text{сгл}}(\mathbf{r})$

Видно, что «недостающая» после применения модифицированного МНК часть фазовой функции интерферограммы на рис. 1 может принимать значе-ния, превышающие π . На рис. 5 показана ошибка (4).

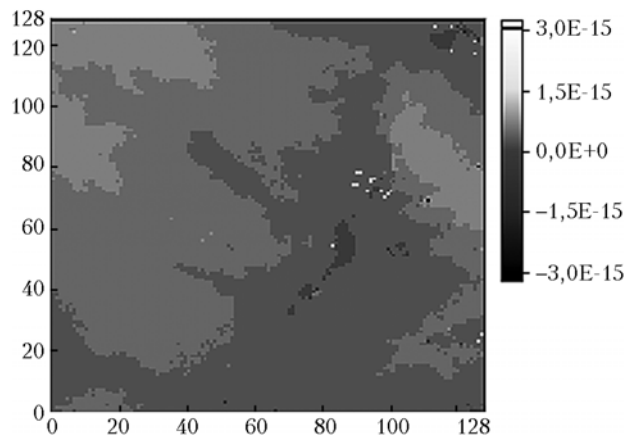


Рис. 5. Ошибка восстановления фазы после второй итера-ции МНК

Можно считать, что она равна нулю, т.е. для рассматриваемого здесь примера достаточно двух итераций, чтобы исключить ошибку сглаживания.

Заключение

Предложена итерационная процедура исклю-чения ошибки сглаживания, возникающей при раз-вертке фазы из ее главного значения методом наи-меньших квадратов. На примере интерферограммы радара с синтезированной апертурой показано, что уже двукратного применения МНК может оказать-ся достаточно для полного исключения этой ошиб-ки. Использование модифицированного МНК на первой итерации позволяет учесть и скрытую фазу. Однако если считать, что наличие точек ветвления фазы вызвано не особенностями объекта интерфе-рометрических исследований, а шумами, то необхо-димости учитывать скрытую фазы нет и на первой итерации следует также использовать обычный МНК.

Работа инициирована участием в интеграцион-ном проекте Сибирского отделения РАН «Аэрокос-мическая радиолокация и радиометрия земных по-кровов».

1. Goldstein R.M., Zebker H.A., Werner C.L. Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping // Radio Sci. 1988. V. 23. N 4. P. 713–720.
2. Ghiglia D.C., Pritt M.D. Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms, and Software. New York: Wiley Interscience, 1998. 493 p.
3. Bamler R., Adam N., Davidson G., Just D. Noise-induced slope distortion in 2-D phase unwrapping by linear estimators with application to SAR interferometry // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens. 1998. V. 36. N 3. P. 913–921.
4. Takeda M., Abe T. Phase unwrapping by a maximum ross-amplitude spanning tree algorithm: A comparative study // Opt. Eng. 1996. V. 35. N 8. P. 2345–2351.
5. Zhong J., Wang M. Phase unwrapping by lookup table method: application to phase mapwith singular points // Opt. Eng. 1999. V. 38. N 12. P. 2075–2080.
6. Gutmann B., Weber H. Phase unwrapping with the branch-cut method: role of phase-field direction // Appl. Opt. 2000. V. 39. N 26. P. 4802–4816.

7. *Baldi A.* Two-dimensional phase unwrapping by quad-tree decomposition // *Appl. Opt.* 2001. V. 40. N 8. P. 1187–1194.
8. *Xue L., Su X.* Phase-unwrapping algorithm based on frequency analysis for measurement of a complex object by the phase-measuring-profilometry method // *Appl. Opt.* 2001. V. 40. N 8. P. 1207–1215.
9. *Lyuboshenko I.V., Maitre H., Maruani A.* Least-mean-squares phase unwrapping by use of an incomplete set of residue branch cuts // *Appl. Opt.* 2002. V. 41. N 11. P. 2129–2148.
10. *Fried D.L.* Branch point problem in adaptive optics // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 1998. V. 15. N 10. P. 2759–2768.
11. *Банах В.А., Фалиц А.В.* Восстановление фазы оптической волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, из измерений разностей фаз // *Оптика атмосф. и океана.* 2001. Т. 14. № 5. С. 424–431.
12. *Banakh V.A., Falits A.V.* Comparison of phase reconstruction algorithms when branch points are present // *Proc. SPIE.* 2002. V. 4884. P. 107–113.
13. *Банах В.А., Фалиц А.В.* Восстановление фазы оптического поля из ее градиента при наличии точек ветвления // *Оптика атмосф. и океана* 2006. Т. 19. № 12. С. 1037–1041.
14. *Lyuboshenko I.* Unwrapping circular interferograms // *Appl. Opt.* 2000. V. 39. N 26. P. 4817–4825.

V.A. Banakh, A.V. Falits. **Phase unwrapping.**

Iteration procedure of mitigation of the smoothing error of the mean least square method of phase unwrapping is described. Effectiveness of the procedure is demonstrated based on the interferogram of sintetic aperture radar.